



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Dipartimento di Economia e Management

Corso di Banca Finanza Aziendale e Mercati Finanziari

Tesi di Laurea

Modelli non parametrici

D.E.A. e F.D.H.

Relatore:

Chiar.mo Prof.re Riccardo Cambini

Candidato:

Ambra Benucci

Anno Accademico 2013-2014

*Ai miei genitori, i migliori coaches,
e a Stefano, il primo dei miei fan...*

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione..... | 9 |
| Capitolo 1. Produttività efficacia ed efficienza..... | 13 |
| 1.1 La misura della produttività..... | 14 |
| 1.1.1 Indici di produttività parziale dei fattori..... | 15 |
| 1.1.2 Indici di produttività globale o totale dei fattori..... | 17 |
| • Metodo di <i>Kendrick</i> o delle variazioni relative..... | 17 |
| • Metodo di <i>Solow</i> | 19 |
| 1.2 La misura dell'efficienza..... | 20 |
| 1.2.1 Efficienza assoluta e relativa..... | 23 |
| 1.2.2 Approcci stocastici e deterministici..... | 25 |
| 1.2.3 Approcci di frontiera e non di frontiera..... | 26 |
| 1.2.4 Approcci parametrici e non parametrici..... | 29 |
| 1.2.4.1 Approcci parametrici..... | 29 |
| • Frontiere di produzione parametriche deterministiche..... | 30 |
| • Frontiere di produzione parametriche stocastiche..... | 32 |
| 1.2.4.2 Approcci non parametrici..... | 34 |
| Capitolo 2. <i>Data Envelopment Analysis</i>..... | 39 |
| 2.1 Introduzione..... | 39 |
| 2.2 Cenni storici sulla DEA..... | 42 |
| 2.3 Postulati dei modelli DEA di base..... | 47 |
| 2.4 Modello CCR..... | 53 |
| • Da Programmazione Frazionaria a Lineare..... | 55 |

| | | |
|--|--|------------|
| 2.4.1 | Il significato dei pesi ottimali..... | 57 |
| ▪ | Esempio: Due <i>Input</i> e un <i>Output</i> | 58 |
| 2.4.2 | Attività di produzione..... | 63 |
| • | Insieme delle possibilità produttive..... | 63 |
| 2.4.3 | Il modello CCR e problema duale..... | 65 |
| 2.4.4 | Modello <i>Output-Oriented</i> | 70 |
| Capito 3. <i>Free Disposal Hull</i>..... | | 75 |
| 3.1 | Introduzione..... | 75 |
| 3.2 | Cenni storici su FDH..... | 76 |
| 3.3 | Postulati alla base dei modelli FDH..... | 77 |
| 3.4 | Modello <i>Free Disposal Hull</i> | 82 |
| ▪ | Esempio: un <i>output</i> -due <i>input</i> | 86 |
| ▪ | Esempio: due <i>output</i> -un <i>input</i> | 88 |
| 3.5 | La metodologia FDH..... | 91 |
| 3.6 | Additività e replica nell'analisi FDH | 95 |
| Capitolo 4. Aspetti comuni e confronto..... | | 101 |
| 4.1 | Introduzione..... | 101 |
| 4.2 | Il trattamento dei dati..... | 102 |
| 4.2.1 | Selezione di <i>input</i> ed <i>output</i> e Numero delle DMU..... | 102 |
| 4.2.2 | Ridurre gli insiemi di dati: <i>Input/Output</i> correlati..... | 104 |
| 4.2.3 | Squilibrio nei Dati di Ampiezza..... | 106 |
| 4.2.4 | Numeri Negativi e Valori Zero..... | 109 |
| 4.2.5 | Dati Mancanti..... | 117 |
| 4.3 | Il Confronto..... | 119 |
| 4.3.1 | Formulazione di DEA e FDH..... | 121 |
| 4.3.2 | La Struttura della Tecnologia di Produzione..... | 125 |
| 4.3.3 | Analisi delle Prestazioni del Produttore..... | 128 |

| | | |
|--------------------------|--------------------------------|------------|
| 4.3.4 | Come trattare gli scarti..... | 130 |
| 4.3.5 | Considerazioni di Calcolo..... | 133 |
| Conclusioni..... | | 136 |
| Bibliografia..... | | 142 |

Introduzione

“*EUROPE 2020 - A strategy for smart, sustainable and inclusive growth*”¹ è il documento inviato da Bruxelles a tutta l’Unione Europea da parte della Commissione Europea. Si tratta del lavoro sulla copertura, ricerca e sviluppo, clima / energia, istruzione, inclusione sociale e sulla riduzione della povertà, che definisce le strategie di crescita per l’Europa fino al 2020. In questo documento, di circa 30 pagine, il termine “efficienza” compare almeno quarantacinque volte, ed il suo significato è rinvenibile altrettante volte anche se non specificato.

Il termine “efficiente” accompagna le regole imposte ai mercati finanziari per un corretto funzionamento; gli obiettivi riguardo all’utilizzo delle risorse –anche naturali; la definizione di competitività e l’incremento degli investimenti in ricerca e sviluppo; l’innovazione in materia di tecnologia, istruzione e formazione a tutti i livelli; perfino il tema dei sistemi fiscali e previdenziali, infine la definizione dei programmi stessi atti al raggiungimento degli obiettivi nei singoli stati europei.

In un mondo globalizzato e nel pieno di una crisi l’obiettivo minimo che una qualsiasi impresa o ente, pubblico o privato, deve compiere, è quello di raggiungere il suo massimo livello di efficienza. Condizione necessaria per la sua sopravvivenza, o quantomeno per evitare lo sperpero di risorse.

Obiettivo di questa tesi è esaminare le due principali tecniche non parametriche di valutazione dell’efficienza: la *Data Envelopment Analysis* e il *Free Disposal Hull* e giungere all’analisi di aspetti comuni e discordi. Definiremo alcune prassi utili alla risoluzione di problematiche pratiche legate all’implementazione dei

¹ CE, (2010) “Communication from the commission: Europe 2020 – Europe's growth strategy”. Brussels, 3.3.2010 COM.

dati, preliminare all'implementazione del modello. Realizzeremo, poi, un confronto in termini di struttura della tecnologia, misurazione delle performance, trattamento degli scarti in *input* e in *output* e complessità di calcolo delle due tecniche.

Nella nostra analisi, in primo luogo, evidenzieremo la differenza tra efficienza, efficacia e produttività, termini molto spesso utilizzati come sinonimi, ma con significati profondamente diversi. Successivamente, analizzeremo le principali metodologie utilizzate per la valutazione della produttività, osservando sia la produttività parziale che globale dei fattori. Giungeremo poi ad indagare i vari approcci di analisi per la valutazione dell'efficienza, argomento principale della tesi.

L'analisi dei vari approcci che si rinvencono nella letteratura (assoluto e relativo, stocastico e deterministico, di frontiera e non di frontiera, parametrico e non parametrico) ci permetterà di mostrare brevemente le differenze tra i vari approcci antagonisti; in particolare facendo un *focus* sugli approcci parametrici, considerando le frontiere di produzione parametriche, deterministiche e stocastiche.

I modelli che andremo ad analizzare in modo approfondito sono: la *Data Envelopment Analysis* e il *Free Disposal Hull*, due tecniche relative, non parametriche, deterministiche, di frontiera.

Nel secondo capitolo ci dedicheremo all'analisi del primo modello DEA, definiremo in primo luogo la nozione dell'oggetto sottoposto alla valutazione dell'efficienza, le DMU (*Decision Making Unit*), e le caratteristiche principali della metodologia che valuta l'efficienza di un insieme di DMU in modo relativo. Percorriamo la storia del modello dalla prima teorizzazione proposta da *Charnes, Cooper e Rhodes* (1978), come soluzione ad una problematica di analisi a livello nazionale delle scuole statunitensi. Successivamente indicheremo e spiegheremo

le implicazioni dei postulati posti alla base dei principali modelli DEA (CCR,BCC). Per un'analisi puntuale e semplificata della metodologia considereremo il Modello DEA-CCR; in prima analisi osserveremo il modello *input-oriented*, che si pone l'obiettivo di minimizzare gli *input* per un dato livello di *output*. Introduciamo le variabili coinvolte (*input* ed *output*) e formuleremo il problema in forma frazionaria e in forma lineare, che ci permetterà di giungere alla definizione dell'“Efficienza-CCR” e quindi alla definizione dei pesi ottimali da attribuire a *input* e *output*. Verrà inoltre proposto un esempio esplicativo del caso due *input*-un *output*. Successivamente sono imposte ipotesi di semipositività e si giungerà alla definizione del *set* delle produzioni possibili e all'elencazione delle sue caratteristiche. Nell'ultima parte del capitolo imposteremo il problema duale, che considera i moltiplicatori come variabili, e si analizzerà in fine l'approccio *output-oriented* (nel quale si massimizza il livello di *output*, dato un certo livello di *input*).

Nel terzo capitolo tratteremo il modello *Free Disposal Hull*. Caratteristica primariamente evidenziata è quella che la distingue dal modello precedente, e cioè, la mancanza dell'ipotesi di convessità dell'insieme delle produzioni possibili. Ripercorreremo l'evento della prima teorizzazione di *Deprins, Simar, e Tulkens* (1984), in risposta alle lacune nell'adattamento dei dati presentati dai modelli esistenti in precedenza, compreso il modello DEA; anche se la metodologia fu puntualmente definita solo da *Tulkens* (1993). Si presenteranno i postulati alla base del modello FDH, le differenze rispetto ai vari sottomodelli DEA e le implicazioni, a livello grafico, nei rispettivi insiemi di produzione possibili.

Si giungerà alla spiegazione puntuale del modello FDH e alla definizione dell'“efficienza FDH”, inizialmente nell'approccio *input-oriented*. Verranno proposti due esempi: il primo del caso un *output*-due *input*, il secondo del caso due *output*- un *input*. Definiremo la procedura per misurare efficienza tecnica sia

nell'approccio *input-oriented* che *output-oriented*. Infine valuteremo le implicazioni dell'ipotesi di additività e replicabilità DEA, all'interno del modello FDH.

Il quarto e ultimo capitolo è diviso in due parti principali. La prima considererà un aspetto che accomuna le due metodologie: il trattamento dei dati necessario e preliminare all'implementazione del modello. In questa parte verrà esposto come risolvere alcune problematiche pratiche quali: la selezione di *input* ed *output* e la definizione del numero delle DMU, la presenza di fattori correlati, lo squilibrio nell'ampiezza dei dati, la presenza di numeri negativi e valori pari a zero, il caso in cui i dati non siano completi (dati mancanti); e per ognuna delle problematiche è esposto un caso esplicativo e risolutivo.

La seconda parte confronterà aspetti divergenti delle varie metodologie sotto il profilo della struttura della tecnologia, della misurazione delle *performance*, del trattamento degli scarti in *input* e in *output* e della complessità di calcolo delle due tecniche; evidenziandone pregi e difetti di entrambe.

Capitolo 1

Produttività, efficacia ed efficienza.

Obiettivo di questo primo capitolo è di capire in modo puntuale il significato dei termini produttività efficacia ed efficienza; questi, infatti, sono spesso utilizzati come sinonimi: vengono utilizzati per descrivere l'abilità di un'impresa nell'utilizzazione delle risorse; ma in realtà essi esprimono concetti diversi.

Il concetto di produttività viene usato per esprimere il rapporto tra la quantità del prodotto finale (*output*) ottenuto dal ciclo produttivo e il volume delle risorse (*input*) impiegate per la sua produzione;² il risultato rappresenta un indicatore della capacità dell'unità produttiva analizzata di trasformare risorse in prodotti.³

L'efficacia di un prodotto o di un servizio efficiente esprime la capacità di questi *output* di soddisfare i bisogni, espressi o latenti, degli compratori. La valutazione dell'efficacia, in termini correnti, si svolge tramite un confronto; elemento determinante è rappresentato, quindi, dal termine che viene utilizzato come base di riferimento.

Il termine di paragone sarà quindi delineato, a seconda che si tratti di un prodotto o di un servizio, da: un obiettivo da raggiungere, rappresentato dal rapporto tra risultati ottenuti e risultati sperati; uno standard (ad esempio di qualità); la domanda di servizio da soddisfare, espressa come rapporto tra domanda soddisfatta e potenziale).

² Secondo la definizione classica si veda Vincent (1968). Allo stesso modo Lovell (1993) definisce la produttività di un'unità di produzione come rapporto tra input e output.

³ L'analisi delle performance produttive(quadro teorico e strumenti di analisi). <http://www.rescoop.com/>

Valutare il livello di efficacia di beni e servizi è utile al produttore per correggere errori o distorsioni del prodotto creato che, pur tecnicamente efficiente, non si dimostri idoneo a soddisfare il cliente finale.⁴

L'efficienza può essere definita come grado di aderenza del processo di produzione osservato ad uno standard di ottimalità.⁵ In particolare *Farrell* (1957) fa una distinzione tra :

- Efficienza Tecnica
- Efficienza Allocativa
- Efficienza Economica

L'efficienza tecnica (o interna) si riferisce al modo in cui le risorse vengono combinate e convertite in beni e servizi: è maggiore se si riesce a produrre una maggiore quantità di beni e servizi con la medesima quantità di risorse, oppure se si riesce ad impiegare minori quantità di risorse per produrre la medesima quantità di beni e servizi.⁶

L'efficienza allocativa, invece, fa riferimento a prezzi e valori monetari; quindi, un'unità di riferimento è efficiente dal punto di vista allocativo se consente il raggiungimento del livello di *output* prefissato minimizzando i costi.⁷

L'efficienza economica è una combinazione delle due precedenti.

1.1 La misura della produttività

Lo studio della produttività può essere utile nell'interpretazione di fenomeni sia di tipo macro che microeconomico. Da un punto di vista macroeconomico i

⁴ Statistica per l'economia e l'impresa. Capitolo 3. La misura della performance e le frontiere di produzione. <http://www.slidefinder.net/>

⁵ Statistica per l'economia e l'impresa. Capitolo 3. La misura della performance e le frontiere di produzione. <http://www.slidefinder.net/>

⁶ I due concetti di efficienza (o inefficienza), coincidono soltanto nel caso di rendimenti di scala costanti (*Farrell*, 1957).

⁷ Vassallo E. Studi e note di economia 1/99. Efficienza statistica e dimensione del sistema bancario italiano. Università di Palermo. <http://www.mps.it/>

problemi inerenti la individuazione e quantificazione di misure di produttività sono affrontate da Stati o da Enti Pubblici che attuano confronti tra i diversi settori dell'economia a livello nazionale e internazionale il cui presupposto è la pubblica utilità. Tale analisi è, però, ovvio che proponga e renda necessario, date le forti differenze esistenti tra i livelli di efficienza e le caratteristiche operative delle aziende operanti in ogni settore, una integrazione di informazioni ottenibili solo dall'analisi microeconomica del problema.⁸

In un'ottica di tipo microeconomico è primario interesse delle imprese quello di definire e misurare i propri livelli di produttività; questo permette alle stesse di conoscere l'andamento del proprio *business* e il collocamento all'interno del mercato, per mantenersi al passo con l'evoluzione delle imprese effettuando confronti spazio-temporali con le altre operanti nello stesso settore. Inoltre applicando gli stessi metodi a livello ancora più analitico, al loro interno per fare comparazioni tra le diverse unità operative.

Le posizioni teoriche più rilevanti per la valutazione della produttività sono riconducibili a due modelli principali:

1.1.1 Indici di produttività parziale dei fattori

I modelli più semplici di misurazione si basano sul concetto di produttività parziale dei fattori. In questi modelli si mette a rapporto la quantità prodotta (o un aggregato, significativo, di *output*) e uno solo dei fattori produttivi (*input*) utilizzati in modo da ottenere ad esempio la produttività del lavoro, la produttività del capitale, dei produttori intermedi, delle materie prime.

⁸ L'analisi delle performance produttive (quadro teorico e strumenti di analisi). <http://www.rescoop.com/>

Produttività parziale generica del lavoro e del capitale.

Notazione:

Y: valore aggiunto a prezzi costanti;

L: misura del lavoro impiegato nel processo produttivo (n. ULA);⁹

K: stock di capitale netto a prezzi costanti.

Produttività parziale generica del lavoro (π_L) e del capitale (π_K):

$$\pi_L = Y/L \quad (\text{prodotto per unità di lavoro})$$

$$\pi_K = Y/K \quad (\text{prodotto per unità di capitale})$$

Indice della variazione della produttività generica del lavoro e del capitale (dal tempo 0 al tempo 1):

$$I\pi_L = \frac{\pi_{L1}}{\pi_{L0}} = \frac{Y_1/L_1}{Y_0/L_0} = \frac{Y_1/Y_0}{L_1/L_0} = \frac{IY}{IL} \quad (1.1)$$

$$I\pi_K = \frac{\pi_{K1}}{\pi_{K0}} = \frac{Y_1/K_1}{Y_0/K_0} = \frac{Y_1/Y_0}{K_1/K_0} = \frac{IY}{IK} \quad (1.2)$$

Conoscendo il numero medio annuo di ore di lavoro (h) e il grado di utilizzazione degli impianti (u), o la loro variazione nel tempo (Ih e Iu), è possibile definire misure “corrette” della produttività del lavoro e del capitale, o delle variazioni nel tempo, che tengano conto dell’effettivo impiego dei fattori produttivi primari.

Ma attraverso questa analisi per “rapporti” non si considera una forma funzionale che descriva il raggiungimento di una data produzione partendo da determinati fattori produttivi; questo rappresenta il limite principale di questi metodi in quanto non permettono di considerare i fenomeni sostitutivi tra *input*; e la semplicità di calcolo che li caratterizza, è stato evidenziato, si accompagna ad

⁹ ULA: Unità di lavoro annuo.

una scarsa attendibilità dei risultati o ad una non soddisfacente rappresentazione della realtà.¹⁰

1.1.2 Indici di produttività globale o totale dei fattori.

Questi metodi derivano dall'esigenza di ovviare ai limiti dei modelli parziali; essi infatti permettono di tenere conto contemporaneamente di tutti gli *input* utilizzati, dei loro legami e combinazioni. Questo aspetto permette di considerare i fenomeni sostitutivi e assume rilevanza quanto maggiore è l'effetto sostitutivo tra capitale e lavoro.

L'indice di produttività globale dei fattori è calcolato come rapporto tra prodotto (o l'insieme dei prodotti nel caso di produzione congiunta) e insieme dei fattori produttivi impiegati.

Osserviamo brevemente due dei principali metodi di valutazione della produttività globale:

- **Metodo di *Kendrick* o delle variazioni relative**

Gli indici di produttività globale vengono calcolati come rapporto tra *output* e *input* di lavoro e capitale congiuntamente considerati.

Si crea la necessità di aggregare gli *input*. Quindi la variazione della produttività globale si otterrà come rapporto tra l'indice della variazione dell'*output* I_{Out} e una funzione degli indici della variazione degli *input* di lavoro e capitale, $ILav$ e $ICap$.¹¹

Per calcolare l'indice di *Kendrick* è necessario definire la produttività specifica del lavoro e del capitale, dopo aver suddiviso l'*output* in due quote: una che

¹⁰ L'analisi delle performance produttive (quadro teorico e strumenti di analisi). <http://www.rescoop.com/>

¹¹ Bracalente B. Appunti statistica economica. Modulo II. Metodi e modelli. <http://www.stat.unipg.it/>

remunererà il lavoro, αOut , e una che remunererà il capitale $(1-\alpha) Out$, ottenendo così:¹²

$$Out = \alpha Out + (1-\alpha) Out \quad (1.3)$$

La produttività specifica del lavoro e del capitale è data dai seguenti rapporti:

$$P_{Lav} = w = \alpha Out / Lav; \quad (1.4)$$

$$P_{Cap} = r = (1-\alpha) Out / Cap. \quad (1.5)$$

P_{Lav} e P_{Cap} rappresentano, rispettivamente, il saggio di remunerazione del lavoro ($P_{Lav} = w$) e del capitale ($P_{Cap} = r$).

Quindi partendo dalla formula iniziale, giungiamo a:

$$Out = \alpha Out + (1-\alpha) Out = P_{Lav} Lav + P_{Cap} Cap \quad (1.6)$$

Considerando due orizzonti temporali, tempo0 e tempo1, avremo:

$$Out_0 = P_{Lav0} Lav_0 + P_{Cap0} Cap_0; \quad (1.7)$$

$$Out_1 = P_{Lav1} Lav_1 + P_{Cap1} Cap_1; \quad (1.8)$$

Se ipotizziamo che al tempo1 le produttività specifiche del lavoro e del capitale rimangano costanti, possiamo definire un “prodotto fittizio” (Out^*):

$$Out_1^* = P_{Lav0} Lav_1 + P_{Cap0} Cap_1. \quad (1.9)$$

¹² Kendrick J.W., Vaccara B.N., (1980). *New developments in productivity measurement and analysis*. Chicago.

In questo modo otterremo l'indice di *Kendrick* tramite il rapporto tra prodotto al tempo 1 (reale) e prodotto fittizio:

$$IP_G^{(K)} = Out_1 / Out_1^* \quad (1.10)$$

- **Metodo di Solow**

L'indice di *Solow*, al contrario di quello di *Kendrick*, non tiene in considerazione solo la funzione che esprime il legame tra *input* e *output*, ma si riferisce esplicitamente alla funzione di produzione: una funzione di produzione di tipo *Cobb-Douglas*, con rendimenti di scala costanti (funzione omogenea di grado 1).¹³

$$Out = Prog(t) Lav^\alpha Cap^{(1-\alpha)} \quad (1.11)$$

$Prog(t)$ esprime il grado di progresso tecnico assunto di tipo neutrale¹⁴.

α misura l'elasticità della produzione rispetto al lavoro, cioè la variazione percentuale del volume di prodotto corrispondente alla variazione percentuale unitaria della quantità di lavoro impiegato;

$1-\alpha$ misura l'elasticità della produzione rispetto al capitale.

In regime di concorrenza perfetta (e con una funzione di produzione omogenea di grado 1) α e $1-\alpha$ corrispondono alle quote di prodotto che spettano, rispettivamente, al lavoro e al capitale.¹⁵

¹³ Solow, R., 1956, "A Contribution to the Theory of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics 70 (1), 65-94.

¹⁴ Tale da far variare l'output ottenibile dal processo produttivo senza che vi siano modificazioni nei saggi marginali di sostituzione tra i fattori produttivi.

¹⁵ Bracalente B. Appunti statistica economica. Modulo II. Metodi e modelli. <http://www.stat.unipg.it/>

Come abbiamo visto precedentemente per l'indice di *Kendrick*, anche in quello di *Solow* è necessario mettere a rapporto il valore reale (non fittizio) dell'*output* al tempo 1 e quello fittizio, ottenuto ipotizzando un processo tecnico costante:¹⁶

$$IP_G^{(S)} = Out_1 / Prog(t) Lav_1^\alpha Cap_1^{(1-\alpha)}. \quad (1.12)$$

Quindi sia l'indice di *Kendrick* che l'indice di *Solow* ci permettono di eliminare i limiti degli indici parziali, ma non sono privi di inconvenienti; questi metodi richiedono di avere a disposizione dati attendibili e alla definizione dell'esatta funzione di produzione, ai problemi relativi alla scelta dei metodi più opportuni per effettuare l'aggregazione dei diversi *input* e, nel caso di produzione congiunta, dei vari *output*.¹⁷

1.2 La misura dell'efficienza

Come lo abbiamo definito il concetto di efficienza rappresenta oggi un aspetto rilevante dell'attività economica; principale problema delle imprese è quello di valutare la propria efficienza e definire i metodi per colmare eventuali lacune.

Molti tipi di realtà operative (definite DMU - *Decision Making Unit*) quali aziende, banche, assicurazioni; e attività collegate a settori diversi anche caratterizzati da partecipazione pubblica come sanità, servizi postali, musei, scuola o, più genericamente, ai servizi erogati dalle amministrazioni locali ricorrono all'analisi empirica per valutare l'efficienza produttiva.

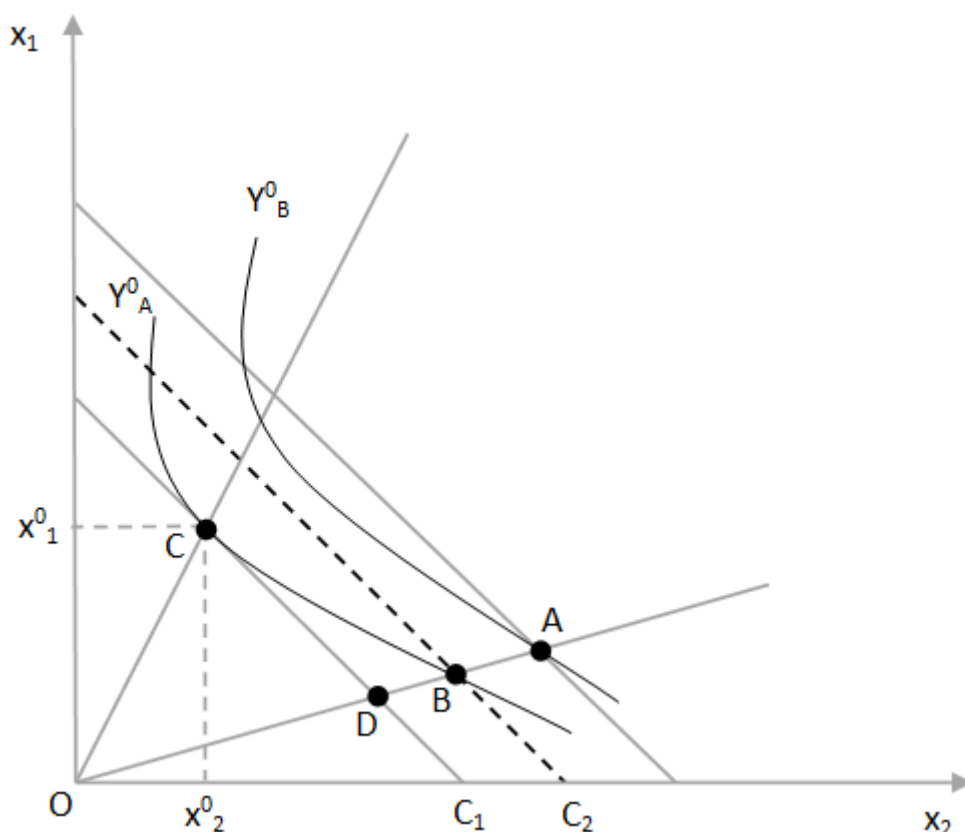
¹⁶ Bracalente B. Appunti statistica economica. Modulo II. Metodi e modelli. <http://www.stat.unipg.it/>

¹⁷ L'analisi delle performance produttive (quadro teorico e strumenti di analisi). <http://www.rescoop.com/>

Come abbiamo detto *Farrell* (1957) definisce l'efficienza tecnica¹⁸ riferendosi al modo in cui le risorse vengono combinate e l'efficienza allocativa in relazione ai prezzi, quindi ai costi. In particolare *Farrell* ipotizza l'esistenza di un'unità produttiva, o un'impresa, che utilizzi due *input*, x_1 e x_2 , ed ottiene un *output*, y , sotto l'assunzione di rendimenti di scala costanti e con una funzione di produzione, che indica, per ogni quantità dei fattori produttivi, la quantità massima di prodotto ottenibile.

Il grado di efficienza tecnica ed allocativa di tale impresa è rappresentato nella Figura 1.1.

Figura 1.1. Efficienza tecnica ed efficienza allocativa



Fonte: Balassone F., Francese M. e Giordano R. (2003). "L'efficienza dei servizi pubblici: Rassegna della letteratura." In "L'efficienza di servizi pubblici". Banca d'Italia. p 22.

¹⁸ "The former measures of a firm's success in choosing an optimal set of inputs, the latter its success in producing maximum output from a given set of input." Vedi Farrell, M.J. (1957), "The Measurement of Productive Efficiency," *Journal of the Royal Statistical Society Series A, General*, 120, Part 3, pag 259.

L'isoquante y_A^0 rappresenta tutte le combinazioni di *input* che permettono di produrre una unità di *output* in modo efficiente. La retta di isocosto C_1 , rappresenta le combinazioni di *input* che individuano il medesimo livello di spesa. Trascurando i segni negativi, la pendenza dell'isoquante misura il tasso marginale di sostituzione tra i fattori di produzione, MP_1/MP_2 (dove MP_i indica la produttività marginale di x_i), quella dell'isocosto è pari al rapporto tra i prezzi dei fattori p_1/p_2 (dove p_i indica il prezzo del fattore x_i).

L'efficienza allocativa si avrà nel punto di tangenza tra la curva di isoquante e la curva di isocosto, punto C. In questa posizione avremo, infatti, che la pendenza delle due curve, ciò significa che il saggio marginale di sostituzione dei due fattori è uguale al rapporto tra i prezzi dei fattori:

$$MP_1/MP_2 = p_1/p_2 \quad (1.13)$$

In questo punto, dato il livello di *output*, la combinazione delle risorse minimizza il costo della produzione; o, per il livello di spesa per gli *input*, minimizza l'*output* ottenibile.

L'efficienza tecnica si ottiene, invece, quando non vi è un utilizzo eccessivo dei fattori; questo è osservabile graficamente attraverso la maggiore vicinanza all'origine dell'isoquante.

Ipotizzando, dunque, che gli isoquanti y_A^0 e y_B^0 siano entrambi associati al medesimo livello di *output*, i punti dell'isoquante y_B^0 determinano situazioni di inefficienza tecnica.¹⁹

Se l'impresa operasse nel contesto descritto dal punto A, che rappresenta una combinazione non ottimale di *input* per produrre l'unità di *output*, essa opererebbe in condizione di inefficienza sia tecnica che allocativa. Se, invece, l'impresa fosse caratterizzata solamente da inefficienza di tipo allocativo,

¹⁹ Vedi Balassone F., Francese M. e Giordano R. (2003). "L'efficienza dei servizi pubblici: Rassegna della letteratura." In "L'efficienza di servizi pubblici". Banca d'Italia. p 11-18

sarebbe rappresentata dal punto B , che si trova sulla curva dell'efficienza tecnica, y_A^0 , ma non su quella dell'efficienza allocativa, C_I .

Presentati questi esempi è facile comprendere che, il grado di efficienza tecnica è dato dal rapporto OB/OA , che misura la porzione di *input* utilizzati effettivamente necessari per la produzione del dato livello di *output*. Di contro, l'inefficienza tecnica è pari a $1 - (OB/OA)$ e cioè il valore di quanto potrebbe essere ridotto il costo di produzione del dato livello di *output*, mantenendo invariato il rapporto tra i fattori.

Il livello di efficienza allocativa è dato, invece, dal rapporto OD/OB : esso rappresenta il costo che si sarebbe sostenuto in caso di efficienza allocativa in rapporto a quello effettivo. L'inefficienza allocativa è pari a $1 - (OD/OB)$.

L'efficienza complessiva è data dal rapporto OD/OA e, di conseguenza, l'inefficienza complessiva è pari a $1 - (OD/OA)$ e cioè l'eccedenza dei costi rispetto al loro minimo potenziale.²⁰

1.2.1 Efficienza assoluta e relativa

Generalmente si distinguono gli approcci tesi a misurare l'efficienza assoluta da quelli finalizzati a misurare l'efficienza relativa.

L'efficienza assoluta definisce per ogni singola unità operativa una misura di rendimento attraverso un rapporto in cui troviamo *input* e *output* misurati con la stessa unità di misura, ad esempio il valore monetario.

Dato che le risorse e i risultati non sono necessariamente espressi nella medesima unità di misura, è necessario eseguire preventivamente un'operazione di omogeneizzazione, per uniformare l'unità di misura: ad esempio *input* e *output* possono essere monetizzati.

²⁰ Esempio tratto da Fiorino N (2010). *L'efficienza del settore pubblico: analisi empirica sui Capoluoghi di Regione italiani*. Pag 7-8.

Il problema collegato a queste operazioni di omogeneizzazione è legato all'esigenza di determinare preventivamente rapporti di equivalenza tra i flussi di *input* e *output*.

Ciò significa che è necessario determinare a priori quante unità di un dato flusso si possono considerare equivalenti, ai fini della valutazione, ad un'unità di un altro flusso.

Quindi una volta che si è deciso il peso di ciascun flusso, che rappresenta il valore di un flusso unitario in un'opportuna unità di misura,²¹ vengono definiti i rapporti di equivalenza. La valutazione sarà così soggettiva e incerta in quanto l'assegnazione di pesi diversi darà luogo a risultati diversi: a seconda del peso assegnato alcune unità potranno ottenere punteggi di efficienza più alti di altre e viceversa.

Perciò nel caso in cui gli *input* e *output* abbiano unità di misura differenti, come nella maggior parte dei casi, ha senso solo effettuare una valutazione comparativa, di efficienza relativa tra le diverse unità operative.²²

L'efficienza relativa esprime la valutazione dell'efficienza di una determinata unità, non sintetizzata in un valore assoluto, ma confrontandola con altre unità. In questo modo all'interno del campione di studio si individueranno una o più unità efficienti e una o più unità inefficienti. In particolare una determinata unità rappresenterà la più efficiente, all'interno del campione considerato; essa rappresenterà il mix *input output* migliore e permetterà l'individuazione di una frontiera di efficienza che definirà il termine di paragone per formalizzare il livello di inefficienza, sempre in senso relativo, delle altre unità.

²¹ Si noti che la specificazione dell'unità di misura prescelta è superflua, dato che l'efficienza è definita da un rapporto.

²² Data Envelopment Analysis (DEA). L'efficienza assoluta Università Trieste. <http://www.units.it>

1.2.2 Approcci stocastici e deterministici

I modelli deterministici non contengono alcun elemento aleatorio e determinano in modo certo la realizzazione del fenomeno studiato in funzione delle variabili prese in considerazione. In un tale modello, dato un certo valore degli *input* e dei parametri, si otterrà sempre una ed una sola soluzione per le variabili di *output*.

Queste tecniche sono quelle più tradizionali e sono caratterizzate da un ridotto grado di complessità a livello computazionale; inoltre il ridotto numero di vincoli posti ai dati di base costituiscono la chiave della loro semplicità d'uso.

Correlata ad una relativa semplicità, però, questo approccio presenta il limite di giungere a valutazioni che restituiscano soltanto un valore puntuale della previsione, trascurando ogni valutazione sulla probabilità del suo realizzarsi. Essi, quindi conducono ad una stima “migliore” (*best estimate*) nel ventaglio dei possibili risultati, ma non hanno le capacità –e non gli è richiesto- di valutare la bontà della stima stessa.

Al contrario, i modelli stocastici²³ considerano la possibilità di variazione degli *input* (variazioni causali o non) fornendo quindi un risultato di tipo probabilistico.

Le variabili endogene dei modelli stocastici sono, infatti, costituite da due componenti: una di tipo sistematico (o esatta) – tipica dei modelli deterministici, e una di tipo stocastico che varia secondo schemi probabilistici. L'utilizzo di queste due componenti permette di considerare nel modello l'effetto di quelle variabili che sono state omesse o che sono relativamente prevedibili.

Questi affinamenti che li caratterizzano, rendono i modelli stocastici più affidabili in quanto tengono conto della variabile aleatoria (il caso) e forniscono risultati più aderenti alla realtà. Non sono comunque privi di difetti: essi infatti basano il modellamento di un'ampia serie di eventi su una quantità relativamente ridotta di parametri.

²³ Stocastico: dovuto al caso, aleatorio, dal greco *stochastikòs*=congetturale

Altra critica mossa a questi modelli, collegata alla loro rigidità, riguarda le assunzioni ritenute troppo semplicistiche se non – talvolta- irreali.

Questi, in effetti, che non consentono facilmente di incorporare giudizi o fattori esterni.

Inoltre, anche l'applicazione pratica e computazionale risulta frequentemente complessa da attuare richiedendo un'abilità statistica e di calcolo non indifferente.²⁴

1.2.3 Approcci di frontiera e non di frontiera

Nella valutazione dell'efficienza si individuano poi due distinti tipi di approcci:

2 Approcci non di frontiera

3 Approcci di frontiera

Per ciò che concerne gli approcci non di frontiera fu *Feldstein* (1967) a fare i primi tentativi di misurazione dell'efficienza partendo da tecniche standard di regressione. Partendo da una funzione di produzione di tipo *Cobb-Douglas*:

$$\ln y_j = \beta_0 + \sum_j \beta_j \ln x_{ij} + u_i \quad (1.14)$$

dove y_i è l'*output* del produttore i ,

x_{ij} rappresentano gli *input*,

u_i è il termine di errore;

i coefficienti β_j sono coefficienti che rappresentano l'elasticità del prodotto a variazioni nell'*input* j .

Attraverso il metodo dei minimi quadrati è possibile stimare i due coefficienti e quindi i residui \hat{u}_i che possono essere utilizzati come misura di efficienza tecnica.

²⁴ Calcarella C. (2012). "I modelli stocastici: teoria e pratica delle nuove tecniche per la valutazione della riserva sinistri". Libera università internazionale degli studi sociali "Guido Garli". Roma. Pag 10-12.
<http://tesi.eprints.luiss.it/>

Dato che la funzione di produzione è stimata su dati effettivi e non è ottenuta sulla base di valori potenziali, di fatto $\hat{u}_i = 0$ implica un livello di inefficienza pari a quello medio; $\hat{u}_i > 0$ ($\hat{u}_i < 0$) implica un'inefficienza inferiore (superiore) alla media.

Sulla base dell'equazione (1.14) si può valutare anche la presenza di inefficienza allocativa. Per tale funzione di produzione, la condizione (1.14) diventa:

$$\frac{\beta_k}{\beta_j} = \frac{p_k x_k}{p_j x_j} \quad (1.15)$$

L'efficienza allocativa determina che, per ogni coppia di *input*, il rapporto tra le spese per i due fattori sia pari al rapporto tra le elasticità del prodotto a tali fattori.²⁵

Il membro di sinistra è considerato come dato in quanto i coefficienti β non variano al variare degli *input*. Pertanto, qualsiasi differenza tra i due termini dell'eguaglianza può essere attribuita ad un uso non corretto di uno o più *input*.

Dopo aver determinato i coefficienti possiamo verificare se un *input* è sopra o sotto utilizzato – in relazione ad un altro. Facendo una differenza tra i due termini dell'equazione (1.15) per ogni coppia di *input*, si giunge alla stima del costo totale dell'inefficienza allocativa.²⁶

Per valutare l'efficienza si può, inoltre, utilizzare una funzione di costo:

$$c_i = \beta_0 + \sum_j \beta_j x_{ij} + u_i \quad (1.16)$$

Avremo:

c_i costo totale o medio dell'unità i ;

x_j include variabili come il livello dell'*output* e i prezzi degli *input*;

u_i termine di errore.

²⁵Balassone F., Francese M., Giordano R.(2003). "L'efficienza dei servizi pubblici: una rassegna della letteratura". Banca d'Italia. Pagg 26-31.

²⁶ Si veda anche Schmidt e Lovell (1979).

Fu *Feldstein* (1967) che, attraverso la comparazione tra costo effettivo e costo atteso sulla base della formula (1.16), propose di valutare l'efficienza.

Anche in questo caso è il residuo che misura l'efficienza: le unità con residui positivi sono meno efficienti rispetto alla media, le unità con residui negativi sono relativamente più efficienti.²⁷

Va evidenziato che le deviazioni dalla media possono essere determinate anche da elementi diversi dall'inefficienza (ad esempio, variabili omesse, cattiva specificazione, errori di misurazione).

Gli approcci di frontiera, invece, misurano l'efficienza delle varie unità produttive DMU sulla base di un riferimento "ottimo" (esso può essere rappresentato da una frontiera delle possibilità di produzione teorica o dal migliore risultato osservato nel campione di unità produttive considerato).

La funzione di produzione fornisce il massimo *output* producibile dati gli *input*, mentre la funzione di costo indica il minor costo sostenibile per la produzione di un certo livello di *output*, dati i prezzi degli *input*.

Entrambe le funzioni condividono la caratteristica di frontiera, massima e minima rispettivamente, sulla quale le imprese pienamente efficienti dovrebbero collocarsi, dato lo stato della tecnologia.

Con l'utilizzo di una metodologia di frontiera è possibile misurare l'efficienza di diverse DMU rispetto ad un riferimento ottimo con due metodologie:

- o tramite la stima di una frontiera delle possibilità di produzione teorica (frontiera assoluta)
- o come miglior risultato conseguito nell'ambito del campione di unità produttive in analisi (frontiera di *best practice*).

²⁷ Feldstein, M. (1967), *Economic Analysis for Health Service Efficiency: Econometric Studies of the British Health Service*, Amsterdam, North-Holland.

1.2.4 Approcci parametrici e non parametrici

Gli approcci di frontiera vengono a loro volta classificati in letteratura tra approcci parametrici e non parametrici.

Gli approcci parametrici hanno come caratteristica principale quella di dover esprimere una forma funzionale con parametri costanti. Questi parametri vengono determinati con metodi statistico-econometrici per far sì che il grafico della funzione raffiguri al meglio i dati.

Quindi per ogni DMU viene valutata l'efficienza, in termini sia di *input* che di *output*, sulla base della funzione stimata; essa rappresenta la frontiera della tecnica produttiva considerata. Ovviamente, e questo rappresenta il principale limite di questo modello, sarà la funzione determinata che condiziona il risultato ottenuto.

Nelle tecniche non parametriche il limite non è rappresentato dalla forma funzionale, in questi modelli è sufficiente che i punti appartenenti alla frontiera soddisfino determinate proprietà. I dati che riguardano le singole unità operative, date le proprietà ipotizzate, vengono analizzati tramite l'utilizzo di tecniche di programmazione matematica con l'obiettivo di determinare quali, all'interno del campione, possano essere collocati sulla frontiera. In questo caso saranno, quindi, le proprietà ipotizzate a determinare il risultato ottenuto nell'analisi di efficienza.²⁸

1.2.4.1 Approcci Parametrici

Nei modelli parametrici, come abbiamo anticipato, è osservando i dati che si determina la frontiera, con una funzione che circonda il più possibile i dati stessi; la frontiera sarà definita da parametri costanti e ignoti:

²⁸Balassone F., Francese M., Giordano R. L'efficienza dei servizi pubblici: una rassegna della letteratura.. Banca d'Italia. 2003. Pagg 26-31. <http://www.bancaditalia.it/>

$$f(x; \beta) + \varepsilon \quad (1.17)$$

dove β rappresenta il vettore di parametri

ε è la somma algebrica di errore stocastico e inefficienza tecnica: composto come $(u \bullet v)$.²⁹

I parametri possono avere un'interpretazione economica, questo rappresenta uno dei punti di forza di questo modello; ad esempio rappresentano (o permettono di ricavare) le elasticità parziali del prodotto rispetto al singolo fattore, i rendimenti di scala, le elasticità di sostituzione dei fattori; inoltre, lo stimatore della tecnologia ha proprietà statistiche note e l'efficienza è catturata dai residui. Come già accennato, invece, il limite principale del modello proviene dalla necessità di imporre una predeterminata forma funzionale alla logica produttiva e una predeterminata distribuzione d'inefficienza. Questi vincoli fanno incorrere il valutatore in possibili errori di specificazione della tecnologia e della struttura dell'errore, che inevitabilmente impattano nella misurazione dell'inefficienza.

Tele rischio è però ridotto scegliendo una forma funzionale flessibile.³⁰

A seconda delle ipotesi sul processo generatore dei dati, e richiamando quanto già detto, è possibile dividere le frontiere parametriche, in deterministiche (DFA, *Deterministic Frontier Analysis*), o stocastiche (SFA, *Stochastic Frontier Analysis*).

● Frontiere di produzione parametriche deterministiche

Nelle frontiere deterministiche l'ipotesi è che non vi sia errore stocastico, ossia $v = 0$, e quindi la componente aleatoria scompare nella formula. Le implicazioni di questa ipotesi sono che ogni punto osservato è considerato come appartenente

²⁹ Per far giacere "u" sotto la frontiera stocastica si impone una distribuzione asimmetrica positiva.

³⁰ Vedi ad esempio la translogaritmica.

a T, in quanto si ritengono assenti errori di misurazione delle variabili, rumore statistico, deviazioni non controllate della frontiera, variabili omesse nel modello ed errori di specificazione.

In una frontiera deterministica, tutto il residuo $\exp\{-u_i\}$ tra produzione osservata, y_i , e produzione teorica, $f(x_i, \beta)$, è considerato misura di efficienza tecnica ET_i :

$$y_i = f(x_i, \beta) \exp\{-u_i\} \quad u_i \geq 0 \quad (1.18)$$

$$ET_i = \frac{y_i}{f(x_i, \beta)} = \exp\{-u_i\} \leq 1^{31} \quad (1.19)$$

Per ciò che riguarda la stima dei parametri e dei livelli di efficienza tecnica è possibile utilizzare differenti tecniche (*Lovell, 1993*).

I minimi quadrati corretti (Cols) rappresentano la base per la stima dei coefficienti della funzione di produzione³² con minimi quadrati ordinari (Ols), si calcolano i residui e si fa poi “slittare” l’intercetta di un ammontare pari al massimo residuo positivo; ossia:

$$\beta^{COLS} = \beta^{OLS} \quad (1.20)$$

$$\alpha^{COLS} = \alpha^{OLS} + \max_j(\hat{e}_j) \quad (1.21)$$

$$\hat{u}_i^{COLS} = \max_j(\hat{e}_j) - \hat{e}_j \quad (1.22)$$

I coefficienti β godono delle proprietà statistiche standard mentre $\hat{\alpha}$ è solo consistente (*Greene, 1980*).³³

³¹ Si veda Afriat (1972) e Richmond (1974).

³² Secondo la procedura proposta da Winsten (1957).

³³ Barbetta G. P., Turati G. Organizzazione industriale dei sistemi di welfare. Teorie e verifiche empiriche dell'efficienza comparata di imprese con diverse strutture proprietarie. Vita e Pensiero. Roma. 2007. Pagg 93-96.

● **Frontiere di produzione parametriche stocastiche**

Il modello di frontiera stocastica anche chiamato “ad errore composto”, è stato introdotto contemporaneamente da *Aigner et al.* (1977), *Battese e Corra* (1977) e *Meeusen e Van de Broeck* (1977).

In questi modelli l’errore ha due componenti: la prima componente esprime i fattori causali, come ad esempio *shocks* imprevisti al processo produttivo (ad esempio, per effetto di condizioni meteorologiche avverse) o errori di misurazione di variabile; per questi fattori quindi si assume una distribuzione simmetrica con valore atteso nullo. La seconda componente sintetizza l’inefficienza tecnica di produzione: dovendo costringere la produzione a porsi solo da un lato della frontiera stocastica quindi la distribuzione sarà asimmetrica e con media positiva.

Le metodologie per decomporre i residui dell’interpolazione, necessari per determinare il livello di efficienza tecnica per ogni unità produttiva sono state elaborate, da *Jondrow et al.* (1982), specificando la forma funzionale della distribuzione dell’inefficienza e derivando la distribuzione condizionata della stessa rispetto alla variabile residua, somma delle due componenti. La media di tale distribuzione condizionata è poi utilizzata per ottenere le stime individuali dei livelli di efficienza (*Lovell*, 1993).

Quindi la funzione di produzione di frontiera stocastica è definita come:

$$y_i = f(x_i, \beta) \exp\{v_i - u_i\} \quad u_i \geq 0 \quad (1.23)$$

Il prodotto potenziale deve essere diminuito del livello di inefficienza tecnica per ottenere la quantità osservata di prodotto.

Una funzione di produzione di frontiera stocastica prevede oscillazioni casuali dei valori critici \hat{y}_i , essendo v_i una variabile stocastica di cui non sono noti

deterministicamente i valori, perciò non può essere disegnata come una linea continua.

I valori teorici \hat{y}_i possono giacere attorno alla corrispondente funzione di produzione deterministica, al di sopra o al di sotto a seconda del segno della variabile v_i :

$$\hat{y}_i = f(x_i, \beta) \exp\{v_i\} \quad (1.24)$$

I problemi da risolvere sono diversi: occorre stimare β , distinguere u_i da v_i , infine calcolare ET_i come :

$$ET_i = \frac{y_i}{f(x_i, \beta) \exp\{v_i\}} = \exp\{-u_i\}^{34} \quad (1.25)$$

Esistono vari modelli in letteratura che affrontano diversamente il problema.

In presenza di sole serie spaziali, il problema di decomporre l'errore nel modello in frontiera stocastica è stato risolto – come detto- nel 1982 con il lavoro di *Jondrow, Lovell, Materov e Schmidt*, i quali suggeriscono di derivare la stima dell'efficienza quale media condizionata dei residui di regressione.

Analogamente alle frontiere deterministiche, si assume una distribuzione asimmetrica positiva per la distribuzione dell'inefficienza tecnica:

$$v_i \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_v^2);$$

$$u_i \sim \text{i.i.d. } N^+(0, \sigma_u^2) \text{ o altra forma asimmetrica.}$$

Si assume inoltre che le distribuzioni di u_i , v_i e x_i siano indipendenti. Queste ipotesi rendono possibile descrivere la funzione di verosimiglianza (*Schmidt*, 1992) in quanto la distribuzione della variabile (v_i, u_i) , per ipotesi di indipendenza, può essere espressa come prodotto delle distribuzioni note di v_i e

³⁴ Barbetta G. P., Turati G. Organizzazione industriale dei sistemi di welfare. Teorie e verifiche empiriche dell'efficienza comparata di imprese con diverse strutture proprietarie. Vita e Pensiero. Roma. 2007. Pagg 93-96.

di u_i . Sostituendo nella funzione di densità del residuo di regressione ε_i la sua espressione analitica, $y_i - f(x_i, \beta)$, si ottiene la funzione di verosimiglianza dalla cui massimizzazione si ricavano le stime dei parametri relativi alla tecnologia e alla decomposizione del residuo nelle due componenti.

In particolare, l'errore complessivo, la cui varianza σ^2 si può esprimere come $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$, è decomposto sfruttando l'asimmetria della distribuzione dei residui della regressione, ε_i . Infatti, la presenza di tale asimmetria consente di stimare $\gamma = \sigma_u / \sigma_v$.

Per ricavare una misura individuale di efficienza tecnica, bisogna utilizzare le informazioni contenute in u_i . Della distribuzione di (u_i, ε_i) si ricava la distribuzione condizionata di $u_i | \varepsilon_i$ e si misura l'efficienza tecnica quale valore atteso condizionato dato il termine di errore osservato:

$$ET_i = \exp\{-\hat{E}(u_i | \varepsilon_i)\} \quad (1.26)$$

La misura di efficienza tecnica è funzione dei risultati della distribuzione di ε_i e dei parametri stimati (Jondrow et al., 1982); la stima ottenuta è non distorta ma non consistente perché la distribuzione condizionata $(u_i | \varepsilon_i)$ non dipende da i (Kumbhakar e Lovell, 2000).

1.2.4.2 Approcci non Parametrici

In contrasto con l'approccio parametrico possiamo definire l'approccio non parametrico. Si tratta di tecniche statistiche per il quale non sono necessarie ipotesi di normalità per la popolazione che stiamo studiando. È per questo motivo che i metodi non parametrici sono anche denominati come “metodi di distribuzione libera”.³⁵

³⁵ <http://statistics.about.com/>

Storicamente, i modelli non parametrici servivano come alternativa ai modelli parametrici quando le condizioni non giustificavano l'uso di alcuni modelli parametrici, come nelle ricerche di mercato (*Mokken, 1997*). Tuttavia, *Ramsay (1997)* ha sostenuto che i modelli di stima non parametrici potrebbero diventare il modello primario di scelta, a meno che non vi siano ragioni sostanziali per preferire un determinato modello parametrico.

I modelli parametrici stimano la curva di frontiera tramite parametri di stima, mentre i modelli non parametrici la stimano direttamente dalle quantità osservate.³⁶

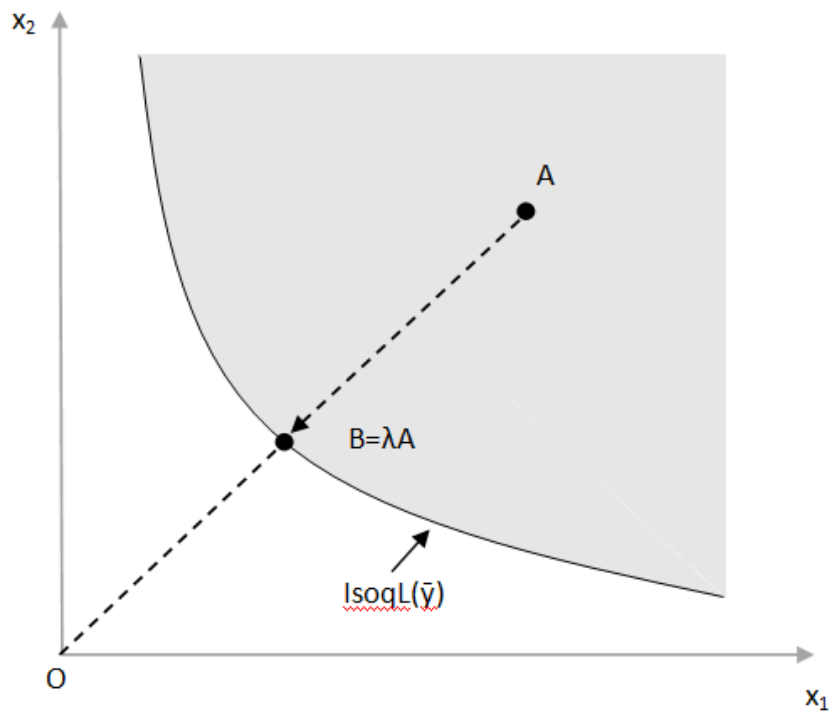
Secondo *Van Der Linden e Hambleton (1997)*, queste funzioni possono essere assunte come funzioni di risposta più veritiere rispetto a quelle risultanti da modelli parametrici perché si basano su un minor numero di ipotesi circa la forma matematica.

Nelle metodologie non parametriche, la valutazione dell'efficienza assegna alle varie DMU (*Decision Making Unit*) un punteggio compreso tra 0 (completa inefficienza) e 1 (massima efficienza). Il parametro, che può essere riferito a *input* o agli *output*, rappresenta un *benchmark* (cioè un punto di riferimento calcolato, detto "*target*", che l'unità produttiva potrebbe raggiungere, migliorando la propria efficienza).

Uno degli strumenti utilizzati a tale scopo è la misura radiale, introdotta da *Debreu (1951)* e *Farrell (1957)*. Secondo questa metodologia si confronta la posizione di ogni DMU con il suo *target*, situato all'intersezione di una retta uscente dall'origine degli assi, passante per il punto che descrive la DMU, e l'isoquanto (o la curva di trasformazione) corrispondente all'isolivello dell'*output* (o dell'*input*) della DMU esaminata.

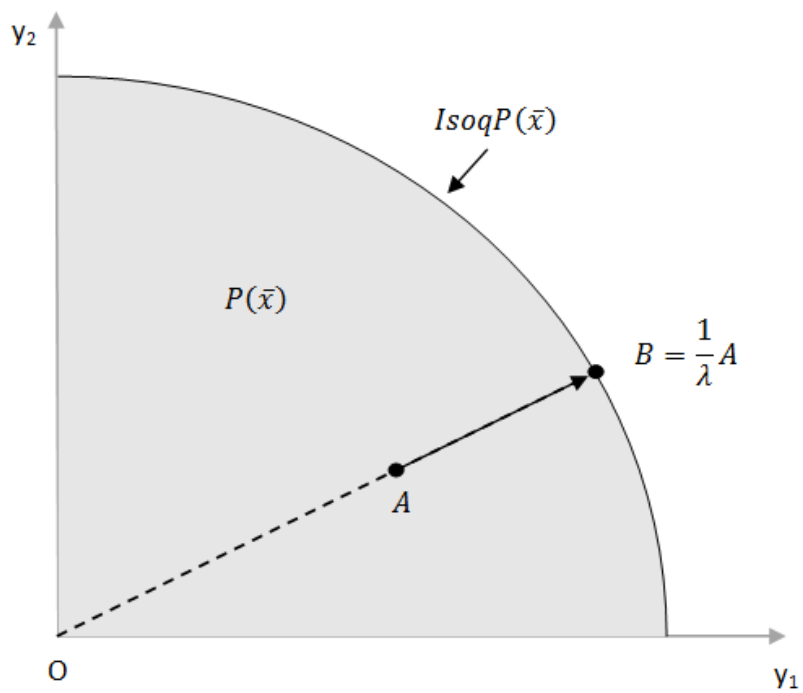
³⁶ Pui-wa lei, Stephen B., Dunbar S.B., Kolen M. J. A comparison of parametric and nonparametric approaches to item analysis for multiple-choice tests. University of Iowa. p 570.

Figura 1.2 Curva di trasformazione degli *input*



Fonte: Suppa D. (2011). "Introduzione alla misura non parametrica". Università di Bergamo.

Figura 1.3 Curva di trasformazione degli *output*



Fonte: Suppa D. (2011). "Introduzione alla misura non parametrica". Università di Bergamo.

- λ rappresenta la massima contrazione equiproportionale degli *inputs* che ancora permette di ottenere i medesimi *outputs*.³⁷
- $\frac{1}{\lambda}$ rappresenta la massima espansione equiproportionale degli *outputs* che è ancora possibile ottenere impiegando i medesimi *inputs*

A livello operativo, i punteggi di efficienza, in base alla misura di *Debreu-Farrell*, sono calcolati contestualmente alla frontiera della tecnica (isoquanto o curva di trasformazione) risolvendo tanti problemi di programmazione lineare quante sono le DMU coinvolte.

La misura dell'efficienza rispetto all'approssimazione lineare convessa della frontiera delle combinazioni ammissibili (DEA) (di *inputs* o di *outputs*), oppure rispetto alla frontiera non convessa (FDH, e soprattutto in quest'ultimo caso), ammette che si presentino degli scarti (*slacks*), cioè degli ulteriori possibili miglioramenti dell'efficienza (conseguiti mediante spostamenti lungo la frontiera), subordinati (successivi) al raggiungimento del *target*.

I metodi non parametrici che abbiamo citato sono quelli comunemente più utilizzati: la DEA (*Data Envelopment Analysis*) e il FDH (*Free Disposal Hull*).

La *Data Envelopment Analysis* fu proposta da *Charnes, Cooper e Rhodes* (1978) è una tecnica basata sulla programmazione lineare per l'analisi di efficienza delle organizzazioni con più *input* e *output*; permette di misurare la massima contrazione (espansione) radiale degli *input* (*output*) compatibile con l'insieme delle possibilità produttive esistenti.

Il *Free Disposal Hull* introdotto da *Deprins, Simar e Tulkens* (1984) è una versione più generale del DEA: esso elimina l'ipotesi di convessità delle combinazioni *input output*, restrizione presente in DEA.

³⁷ Domenico S. Introduzione alla misura non parametrica dell'efficienza. Università di Bergamo.2011.p 6-9.

Il ridotto numero di ipotesi necessarie per questi modelli e la “relativa” facilità di applicazione rappresentano i motivi del crescente interesse del mondo scientifico per questi modelli.

Capitolo 2

Data Envelopment Analysis

2.1 Introduzione

La *Data Envelopment Analysis* (DEA) è un approccio relativamente nuovo "dati orientato" (orientato ai dati) per valutare le prestazioni di un insieme di entità omogenee chiamate Decision Making Unit (DMU) che convertono *input* multipli in *output* multipli. La definizione di DMU è generica e flessibile. Negli ultimi anni si sono viste una grande varietà di applicazioni di DEA utilizzate nella valutazione delle prestazioni di diversi tipi di entità, impegnate in diverse attività, in molti contesti diversi, in molti paesi diversi.

Queste applicazioni DEA hanno utilizzato DMU di varie forme per valutare le prestazioni di entità, come ospedali, aeronautica militare US, università, città, tribunali, imprese, e altri, tra cui le prestazioni di paesi, regioni, ecc.

Poichè richiede poche assunzioni, DEA, ha anche aperto nuove possibilità per l'uso in casi in cui l'utilizzo di altri approcci era impossibile a causa della complessa (e spesso sconosciuta) natura delle relazioni tra i molteplici *input* e *output* coinvolti all'interno delle DMU.³⁸

Come sottolineato in *Cooper, Seiford e Tone* (2000), DEA è stato utilizzato anche per fornire nuove intuizioni in attività (ed entità) che erano state

³⁸ Vedi Cooper, W. Lawrence M, Seiford M., Zhu J. (2004) "Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations". En: Handbook on Data Envelopment Analysis, Capitolo 1. Cooper, William W.; Seiford, Lawrence M.; Zhu, Joe (Eds.) . International Series in Operations Research & Management Science, pp 1 e seg.

precedentemente valutate con altri metodi.³⁹ Per esempio, gli studi di pratiche di *benchmarking* con la DEA hanno identificato numerose fonti di inefficienza in alcune delle aziende più redditizie - le imprese che avevano utilizzato come benchmark di riferimento il criterio di redditività presente - e questo ha fornito un veicolo per identificare *benchmark* migliori in molti studi applicati.

Dal momento in cui DEA è stato introdotto nella sua forma attuale nel 1978, i ricercatori di molti campi hanno subito riconosciuto che si trattava di una metodologia ottimale e facilmente utilizzabile per la modellazione di processi operativi per la valutazione delle prestazioni.

Ad esempio, *Zhu* (2002) fornisce un certo numero di modelli di fogli di calcolo DEA che possono essere utilizzati nella valutazione delle prestazioni e *benchmarking*.⁴⁰

L'orientamento empirico della DEA e l'assenza della necessità di numerose assunzioni a priori, che accompagnano gli altri approcci (come i formulari standard di analisi statistica di regressione), hanno portato al suo uso in molti studi che coinvolgono la stima della frontiera efficiente nel settore governativo e senza scopo di lucro, nel settore regolamentato, e nel settore privato. Vedi, per esempio, l'uso della DEA per individuare una nuova capitale in Giappone, come descritto in *Takamura e Tone* (2003).⁴¹

Nel loro studio originario, *Charnes, Cooper e Rhodes* (1978) hanno descritto DEA come un modello di programmazione matematica applicata ai dati osservabili che fornisce un nuovo modo di ottenere stime empiriche delle

³⁹ Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston.

⁴⁰ Zhu J. (2002). Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets and DEA Excel Solver. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA

⁴¹ Takamura, T. and K. Tone, 2003, "A Comparative Site Evaluation Study for Relocating Japanese Government Agencies Out of Tokyo" Socio-Economic Planning Sciences 37, 85-102.

relazioni - come ad esempio le funzioni di produzione e/o superfici di produzione efficiente - che sono capisaldi dell'economia moderna.⁴²

Formalmente DEA è una metodologia diretta alla ricerca della frontiera piuttosto che le tendenze centrali del campione (media). Infatti a differenza dei modelli di regressione statistica non cerca di misurare un piano di regressione attraverso il centro dei dati.

L'efficienza relativa in DEA si accorda con la seguente definizione, che ha il vantaggio di evitare la necessità di assegnare a priori misure dell'importanza relativa ad ogni *input* o *output*:

Definizione 2.1 (Definizione di Efficienza estesa *Pareto-Koopmans*): l'efficienza totale, (100%), viene raggiunta da qualsiasi DMU se e solo se nessuno dei suoi *input* o *output* può essere migliorato senza peggiorare alcuni dei suoi altri *input* o *output*.⁴³

Ma dato che nella maggior parte delle applicazioni di gestione o di scienze sociali non saranno noti i livelli di efficienza teoricamente possibili. La definizione precedente è dunque sostituita nella seguente definizione:

Definizione 2.2 (Efficienza relativa): Una DMU deve essere valutata pienamente efficiente (100%), sulla base delle evidenze disponibili, se e solo se dalle performance delle altre DMU non emerge che alcuni dei suoi *input* o *output* possono essere migliorati senza peggiorare alcuni dei suoi altri *input* o *output*.⁴⁴

⁴² Vedi Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Zhu, J. "Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations". In "Handbook on Data Envelopment Analysis". Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Zhu, J. International Series in Operations Research & Management Science. Ed 2. Springer. Chapter 1. Pag 1-7.

⁴³ Vedi Cooper, W. Lawrence M, Seiford M., Zhu J. (2004) "Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations". En: Handbook on Data Envelopment Analysis, Capitolo 1. Cooper, William W.; Seiford, Lawrence M.; Zhu, Joe (Eds.) . International Series in Operations Research & Management Science, pp 1 e seg.

⁴⁴ Vedi Cooper, W. Lawrence M, Seiford M., Zhu J. (2004) "Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations". En: Handbook on Data Envelopment Analysis, Capitolo 1. Cooper, William W.;

Si noti che questa definizione evita la necessità di ricorrere a prezzi o altre ipotesi sui pesi che dovrebbero riflettere l'importanza relativa dei diversi *input* o *output*. Si evita inoltre la necessità di specificare in modo esplicito le relazioni formali che dovrebbero esistere tra *input* e *output*. Questa definizione di base su l'efficienza, denominata "efficienza tecnica", in economia può, tuttavia, essere estesa ad altri tipi di efficienza quando i dati come i prezzi, i costi unitari, ecc, sono disponibili per l'uso nella DEA.

2.2 Cenni storici sulla DEA

In un articolo che rappresenta la nascita della DEA, *Farrell* (1957) è stato motivato dalla necessità di sviluppare metodi e modelli migliori per la valutazione della produttività, rispetto a quelli dell'epoca.

Egli sosteneva che i tentativi compiuti sino ad allora, anche se fornivano misurazioni accurate, erano molto restrittivi e incapaci di combinare misure di *input* multipli in una misura complessiva di efficienza soddisfacente. Rispondendo a queste carenze di indici separati di produttività del lavoro, produttività del capitale, ecc, *Farrell* ha proposto un approccio di analisi delle attività che potevano affrontare il problema più adeguatamente. Le sue misure erano destinate ad essere applicate a qualsiasi organizzazione produttiva; dalle sue parole, "... da un *workshop* di una intera economia". Nel processo, ha esteso il concetto di "produttività" al concetto più generale di "efficienza".⁴⁵

Seiford, Lawrence M.; Zhu, Joe (Eds.) . International Series in Operations Research & Management Science, pp 1 e seg.

⁴⁵ Vedi Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Zhu, J. "Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations". In "Handbook on Data Envelopment Analysis". Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Zhu, J. International Series in Operations Research & Management Science. Ed 2. Springer. Chapter 1. Pag 1-7.

Il modello iniziale DEA fu originariamente presentato in *Charnes, Cooper e Rhodes* (CCR) (1978),⁴⁶ costruito sul precedente lavoro di *Farrell* (1957).

Questo lavoro di *Charnes, Cooper e Rhodes* ebbe origine nei primi anni 1970, in risposta agli sforzi di *Edwardo Rhodes* nella scuola della *Carnegie Mellon University of Urban & Public Affairs* - ora la *HJ Heinz III School of Public Policy and Management*.

Sotto la supervisione di W.W. *Cooper*, questa tesi è stata diretta alla valutazione di programmi educativi per gli studenti svantaggiati (soprattutto neri o ispanici) in una serie di studi su larga scala intrapresi nelle scuole pubbliche degli Stati Uniti con il sostegno da parte del governo federale. L'attenzione è stata infine incentrata sul "*Programma Follow Through*" - un enorme tentativo da parte dell'Ufficio statunitense (ora Dipartimento della Pubblica Istruzione) di applicare i principi della progettazione statistica ad una serie di scuole abbinate a uno studio a livello nazionale.⁴⁷

Tuttavia, risultati insoddisfacenti e assurdi furono ottenuti da tutti gli approcci statistici ed econometrici che *Rhodes* tentò di utilizzare. Durante il tentativo di rispondere a questa situazione, *Rhodes* richiamò all'attenzione di *Cooper* all'articolo di *Farrell*.⁴⁸ In questo articolo *Farrell* aveva usato "concetti di analisi di attività" per correggere ciò che credeva fossero carenze nei numeri indice, comunemente usati nella misurazione della produttività (e simili).

Il nome di *Pareto* è assegnato alla prima di queste due definizioni per i seguenti motivi. Nel suo *Manuale di Economia Politica* (1906) l'economista svizzero-italiano, *Vilfredo Pareto*, stabilì la base della moderna "economia del benessere",

⁴⁶ Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, E. (1978), "Measuring the Efficiency of Decision Making Units," *European Journal of Operational Research* 2:6 (November), 429-44.

⁴⁷ Vedi: Charnes A., Cooper W.W and Rhodes E. (1978) "A Data Envelopment Analysis Approach to Evaluation of the Program Follow Through Experiments in U.S. Public School Education," *Management Science Research Report No. 432*, Carnegie-Mellon University, School of Urban and Public Affairs, Pittsburgh, PA.

⁴⁸ Farrell, M.J. (1957), "The Measurement of Productive Efficiency," *Journal of the Royal Statistical Society Series A, General*, 120.

vale a dire, la parte di economia che si occupa di valutazione delle politiche pubbliche, notando che una politica sociale potrebbe essere giustificata se ha migliorato la condizione di alcune persone senza peggiorare quella degli altri.⁴⁹ In questo modo la necessità di fare confronti tra il valore dei guadagni, per alcuni, e la perdita, per altri, potrebbe essere evitata.

Questo evita la necessità di accertare le "funzioni di utilità" delle persone e/o l'importanza relativa dei guadagni e delle perdite di ciascun individuo.

Questa proprietà, nota come il "Criterio di *Pareto*", usato in economia del benessere, è stato riportato in "Analisi attività di produzione e distribuzione", un libro edito da *Koopmans* (1951). In tale contesto, queste proprietà sono state accordate ai "beni finali": questi erano vincolati in modo che nessun bene finale potesse essere migliorato se questo miglioramento comporta un peggioramento di uno o più altri beni finali.

I beni finali (*output*) dovevano essere ottenuti in quantità prefissate, mentre gli *input* erano da determinare in modo ottimale in risposta ai prezzi e gli importi fissati esogenamente per ogni *output*.

Particolare attenzione è stata poi diretta da *Koopmans* alla definizione di "prezzi di efficienza", che sono i prezzi associati tramite una efficiente allocazione delle risorse (*input*) per soddisfare le esigenze di beni finali.⁵⁰

Pareto e *Koopmans* si occupavano dell'analisi di intere economie; è perciò ragionevole consentire prezzi dei fattori e dei quantitativi da stabilire in funzione della loro capacità di soddisfare le richieste finali. *Farrell*, tuttavia, ha esteso la proprietà *Pareto-Koopmans* agli *input* e *output* e evitò qualsiasi uso di prezzi o "meccanismi di scambio".

Ancora più importante, ha usato le prestazioni di altre DMU per valutare il comportamento di ogni DMU relativa agli *output* e agli *input* utilizzati. Ciò ha

⁴⁹ Pareto, V. (1906). "Manuale di economia politica". Società Editrice Libreria. Milano.

⁵⁰ Koopmans, T.C. (1951), "An Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities," in Koopmans, T.C. (ed.), Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission for Research in Economics, Monograph No. 13. New York: John Wiley and Sons, Inc.

permesso di procedere empiricamente alla determinazione della loro efficienza relativa. La misura risultante, che viene indicata come "misura *Farrell* di efficienza", è stata considerata da *Farrell* stesso come limitata e significa "efficienza tecnica" o la quantità di "rifiuti" che può essere eliminata senza peggiorare qualsiasi *input* od *output*.⁵¹

L'approccio di *Farrell* a valutazioni di efficienza, come sancito nella "misura *Farrell*", porta con sé un presupposto di parità di accesso agli *input* da parte di tutte le DMU. Questo non significa che tutte le DMU utilizzano le stesse quantità di *input*, tuttavia, e, anzi, parte del loro valutazioni di efficienza dipenderà dalla quantità di *input* utilizzata da ciascuna DMU così come gli *output* che esse producono.

A dire il vero, la definizione di efficienza che abbiamo denominato "Efficienza Estesa *Pareto-Koopmans*" e "Efficienza relativa" sono stati formalizzati da *Charnes*, *Cooper* e *Rhodes* piuttosto che da *Farrell*.

Tuttavia, queste definizioni sono conformi ai modelli di *Farrell* e al modo in cui *Farrell* li ha utilizzati. In ogni caso, queste sono state le definizioni che *Charnes*, *Cooper* e *Rhodes* utilizzarono per guidare gli sviluppi che successivamente descriveremo.

Il lavoro empirico di *Farrell* era stato limitato ai casi *single-output* e il suo schizzo di estensioni a più *output* non ha fornito ciò che era necessario per le applicazioni per grandi insiemi di dati come quelli coinvolti nel Programma *Follow Through*. Per ottenere ciò che era necessario in forma implementabile computazionalmente, *Charnes*, *Cooper* e *Rhodes* hanno sviluppato la coppia duale di problemi di programmazione lineare.⁵²

⁵¹ Vedi: Cooper, W. Lawrence M, Seiford M., Zhu J. (2004) "Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations". En: Handbook on Data Envelopment Analysis, Capitolo 1. Cooper, William W.; Seiford, Lawrence M.; Zhu, Joe (Eds.) . International Series in Operations Research & Management Science, pp 1 e seg.

⁵² Vedi: Cooper, W. Lawrence M, Seiford M., Zhu J. (2004) "Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations". En: Handbook on Data Envelopment Analysis, Capitolo 1. Cooper, William W.;

Fu poi notato che misura di *Farrell* riusciva a spiegare gli scarti diversi da zero, che è dove si trovano le variazioni percentuali connesse ad inefficienze di miscela (in *input* e in *output*). L'eventuale presenza di scarti non-zero come fonte di questo mix di inefficienze richiede attenzione anche quando sia limitata all'"efficienza tecnica".

Per risolvere questo problema, *Charnes*, *Cooper* e *Rhodes* hanno introdotto concetti matematici che sono costruiti attorno agli elementi "non-Archimede"⁵³ associati con $\varepsilon > 0$, che gestiscono il problema assicurando che gli scarti siano sempre massimizzati senza alterare il valore della misura di *Farrell*.

I problemi duali ideati da *Cooper* e *Rhodes* furono facilmente estesi a più *output* e più *input* in modo che potessero individuare le inefficienze, in ogni *input* e ogni *output*, per ogni DMU.

Era desiderabile, comunque, trovare qualcosa di migliorativo nel modo di determinare gli indicatori sintetici. A questo punto, *Cooper* ha invitato A. *Charnes* ad unirsi a lui e *Rhodes* a quello che prometteva di essere una linea della ricerca molto interessante.

Utilizzando il precedente lavoro di *Charnes* e *Cooper* (1962), che aveva stabilito il campo di "programmazione frazionaria",⁵⁴ *Charnes* è stato in grado di mettere i problemi duali di programmazione lineare, ideati da *Cooper* e *Rhodes*, nel modulo di rapporto equivalente e questo ha fornito una base per unificare ciò che era stato fatto in DEA, con approcci lunga data, alla valutazione di efficienza e di analisi utilizzati in altri settori, come l'ingegneria e l'economia.

Dal momento in cui lo studio iniziale *Charnes*, *Cooper* e *Rhodes* (circa 2000 articoli) sono apparsi in letteratura si assistette ad una rapida crescita e una

Seiford, Lawrence M.; Zhu, Joe (Eds.). International Series in Operations Research & Management Science, pp 1 e seg.

⁵³ Una struttura che presenta una coppia di elementi non nulli, uno dei quali è infinitesimo rispetto all'altro, si dice che sia non Archimede.

⁵⁴ Charnes, A., Cooper, W.W (1962) . "Programming with Linear Fractional Functionals". Naval Research Logistics Quarterly. Vol. 9, pp. 181-6.

diffusa (e quasi immediata) accettazione della metodologia di DEA a testimonianza suoi punti di forza e di applicabilità.⁵⁵

2.3 Postulati dei modelli DEA di base

I modelli di valutazione dell'efficienza in DEA presumono la disponibilità dei dati in *inputs* $x_{id} \geq 0$, $i \in I \equiv \{1, \dots, \psi\}$ e gli *output* $y_{\theta d} \geq 0$, $\theta \in \Theta \equiv \{1, \dots, \eta\}$, per ogni unità di processo decisionale (DMU) $d \in D \equiv \{1, \dots, \xi\}$. Il *set* delle produzioni (possibili) T è definito come

$$T \equiv \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \text{output } y \equiv (y_1, \dots, y_\eta) \text{ può essere} \\ \text{prodotto da input } x \equiv (x_1, \dots, x_\psi) \end{array} \right. \right\} \quad ^{56}$$

La possibilità produttiva (x, y) nel *set* T è efficiente se non esiste nessun $(x', y') \in T$, con $x' \leq x$, $y' \geq y$ e una stretta disuguaglianza per almeno un *input* o un *output*. Una misura di efficienza per una DMU d basata sulla funzione di distanza di Shepard (1970)⁵⁷ è

$$\rho_d = \inf\{\rho | (\rho x_d, y_d) \in T\} \quad (2.1)$$

⁵⁵ Vedere Cooper, Seiford e Tone (2000). Vedi anche G. Tavares (2003).

⁵⁶ Banker, R.D., (1992) "Selection of efficiency evaluation models". Contemporary accounting Research. Vol 9. N. 1. Pag 343-355.

⁵⁷ Con riferimento ad una combinazione produttiva (x, y) in cui x è più che sufficiente per produrre y , la funzione di distanza input-oriented opera la massima riduzione equiproportionale degli input tale che si possa continuare a produrre y .

La DMU d è inefficiente se $\rho_d < 1$.⁵⁸ *Farrell* (1957) e *Banker, Charnes e Cooper* (1984) suggerirono altre misure di efficienza basate sulla funzione distanza di *Shepard*.

I rendimenti di scala costanti abbinati alla tecnologia *input/output* possono essere rappresentati come

$$T_M \equiv \{(x, y) | y_i \leq m_i x_i, m_i > 0, i \in I\} \quad (2.2)$$

Qui, $m_i > 0$ è il massimo *output* possibile da un'unità di *input* i . È evidente che la misura di efficienza basata sulla funzione distanza di *Shepard*⁵⁹ è data in questo caso come

$$\rho_d = \max_{i \in I} \left\{ \frac{y_{id}}{m_i x_{id}} \right\} \quad (2.3)$$

In applicazioni empiriche, comunque, m_i non è conosciuta e deve essere stimata dai dati osservati, basati su una conoscenza a priori della natura della corrispondenza di produzione (modello). DEA fornisce una metodologia orientata empiricamente per stimare la produzione efficiente dai dati osservati. I modelli DEA infatti, fanno esplicite presupposizioni circa la tecnologia sottostante, che deve essere considerata da un ricercatore prima di scegliere un modello particolare per l'applicazione. In particolare per il modello DEA presentato da *Banker, Charnes e Cooper* (BCC, 1984) si specificano i seguenti postulati per il set di produzione stimata T :

⁵⁸ Chiaramente $\rho_d \leq 1$ la DMU d non è necessariamente efficiente se $\rho_d = 1$ come questo non preclude l'esistenza di scarti s_{id}^- , $i \in I$, e $s_{\theta d}^+$, $\theta \in \Theta$, con almeno uno dei s_{id}^- , $s_{\theta d}^+$ strettamente positivo e $(x_d - s_d^-, y_d + s_d^+) \in T$. Si veda *Banker, Charnes e Cooper* (1984).

⁵⁹ *Shepard, R.W.* (1953), *Cost and Production Function*. Princeton: Princeton University Press.

Postulato 1: Convessità del *set* delle produzioni possibili

Se (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in T$, allora $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in T$ per ogni $\lambda \geq 0$.

Postulato 2: Monotonicità delle produzioni possibili

Se $(x_1, y_1) \in T$ e $x_2 \geq x_1, y_2 \leq y_1$, allora $(x_2, y_2) \in T$

Postulato 3: Avvolgimento delle osservazioni

Ogni coppia osservata $(x_d, y_d) \in T$ per ogni $d \in D$

Postulato 4: Estrapolazione minima

Se l'insieme T' soddisfa gli altri postulati specificati per il *set* di produzione, allora $T \subseteq T'$.⁶⁰

I primi due postulati rappresentano proprietà regolari comunemente invocate per gli insiemi di produzione.⁶¹ Il terzo postulato assicura che il *set* di produzione stimata includa tutte le effettive osservazioni. L'ultimo postulato riflette la supposizione che i precedenti postulati specifichino tutta la conoscenza disponibile sulla corrispondenza tra *input* e *output*. L'insieme stimato è il più piccolo *set* tra tutti i possibili *set* di produzione che soddisfino le proprietà rappresentate nei postulati precedenti. Se qualsiasi caratteristica aggiuntiva è desiderata per il *set* di produzione, allora questa deve essere specificata esplicitamente per definire la popolazione ristretta che determina l'insieme più piccolo, altrimenti non c'è certezza che il più piccolo insieme mostrerà le caratteristiche aggiuntive.

⁶⁰ Banker, R. D., A. Charnes and W. W. Cooper, 1984, "Models for the Estimation of Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis", *Management Science*, 30, 1078-1092.

⁶¹ Banker, R.D., (1992) "Selection of efficiency evaluation models". *Contemporary accounting Research*. Vol 9. N. 1. Pag 343-355.

L'unico insieme delle possibilità produttive T stimato sulla base dei quattro postulati⁶² DEA sopra elencati è dato da $\hat{T} = \{(x, y) | \hat{\rho}(x, y) \leq 1\}$ dove

$$\hat{\rho}(x, y) = \min \rho \quad (2.4)$$

$$\text{Sottoposto a} \quad \sum_{d \in D} \lambda_d x_d \leq \rho x \quad (2.5)$$

$$\sum_{d \in D} \lambda_d y_d \geq y \quad (2.6)$$

$$\sum_{d \in D} \lambda_d = 1 \quad (2.7)$$

$$\rho, \lambda_d \geq 0 \quad (2.8)$$

Il problema lineare detto sopra (2.4 -2.8) è riferito al modello di BBC nella letteratura DEA. Qui, $\hat{\rho}(x, y)$ è il valore della funzione di distanza, stimata da *Shepard*, e può essere impiegato come base per una misura di efficienza.⁶³

L'approccio BCC è di tipo deterministico, la misura di efficienza stimata è uguale al vero valore se sono soddisfatti tutti e quattro i postulati.⁶⁴

Il legame tra DEA e metodi tradizionali di stima econometrica diventa trasparente se è specificata una funzione di densità di probabilità $f(\rho)$ per la misura dell'efficienza ρ , in modo che $f(\rho) \geq 0$ per $0 \leq \rho \leq 1$ e $\int_0^1 f(\rho) d\rho = 1$. I postulati 3 e 4 sono sostituiti dai seguenti postulati:

Postulato 5: Probabilità di osservazione efficace

La funzione di densità di probabilità $f(\rho) \geq 0$ per $0 \leq \rho \leq 1$ e $\int_0^1 f(\rho) d\rho = 1$ è tale che $\int_{-1}^1 f(\rho) d\rho > 0$ per ogni $\delta > 0$.

⁶² Vedi Banker (1992) per una prova formale della determinazione unica del set di produzione.

⁶³ Vedi Bankere al. (1984) per ulteriori rettifiche per distinguere da punti di confine inefficienti.

⁶⁴ In contrasto, Banker (1992) presenta un approccio stocastico che tratta la misura di distanza di Shepard (efficienza), per le osservazioni individuali, come una variabile random.

Le stime di efficienza fornite da $\hat{\rho}(x_j, y_j), j \in D$ dal problema lineare (2.4-2.8) sono statisticamente coerenti sotto i postulati 1, 2 e 5. Se il postulato 5 si rafforza ulteriormente con l'aggiunta del seguente postulato 6, allora $\hat{\rho}(x_j, y_j), j \in D$ è anche una stima di massima verosimiglianza.

Postulato 6: L'aumento di densità di probabilità

Se $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq 0$, allora $f(\rho_1) \geq f(\rho_2)$.

Critica nell'applicazione dei postulati 3 e 4 o 5 e 6, è la supposizione che la sola informazione disponibile sul *set* di produzione (cioè la natura delle relazioni tra *input* e *output*) è che questa sia rappresentata nei postulati 1 e 2.⁶⁵

In altre parole l'estrapolazione, nello stimare l'insieme di produzione, è minimizzata o allo stesso modo massimizzata, soggetta solo alla convessità, e monotonicità dei postulati.

Se sono disponibili o postulate informazioni aggiuntive (tali come rendimenti costanti di scala o separabilità) sull'insieme di produzione allora l'ottimizzazione come quella nel (2.4) è preformata e soggetta a tale struttura aggiuntiva.

Consideriamo per esempio, la conoscenza aggiuntiva che l'insieme di produzione presenti rendimenti di scala costanti.

Postulato 7: Rendimenti di scala costanti

Se $(x, y) \in T$ e $k > 0$ allora $(kx, ky) \in T$.

Postulati 1, 2, 7, 3 e 4 determinano un *set* di produzione unica per cui $\hat{\rho}(x, y)$ è computato come prima eccetto che la (2.4) è minimizzata sottoposta solo ai

⁶⁵ Banker, R.D., (1992) "Selection of efficiency evaluation models". Contemporary accounting Research. Vol 9. N. 1. Pag 343-355.

vincoli (2.5) (2.6) e (2.8); il vincolo (2.7) è omissso.⁶⁶ Questo produce il, così chiamato, modello CCR nel DEA, che dovrebbe essere impiegato quando le sole proprietà stipulate per il *set* di produzione siano: convessità, monotonicità e rendimenti di scala costanti.

Nota che il postulato 7 è logicamente coerente con i postulati 1, 2, 3 ma il *set* di produzione in BCC è basato solo sui postulati 1, 2, 3 e il 4 è stimato, dove $\hat{\rho}(x, y)$ minimizza (2.4) soggetta a (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8), poi il *set* di produzione stimato non necessita (e di solito non) presenta rendimenti di scala costanti.

Perciò, punteggi di efficienza del DEA, relativi ad una tale produzione stimata di BBC non saranno gli stessi dei veri valori di efficienza se le osservazioni sono effettivamente ottenute da rendimenti di scala costanti degli insiemi di produzione. La coerenza stocastica dell'estimatore DEA, comunque, ci assicura che la differenza tra i valori di efficienza di BBC e CCR svaniscono asintoticamente quando la grandezza del modello (numero di osservazioni, ξ) cresce.

I modelli CCR e BCC sono i primi e da qui i più comunemente impiegati in DEA. Parecchi altri modelli DEA si sono sviluppati nell'ultima decade per trattare situazioni tali come il prodotto marginale di crescita (*Banker e Maindiratta*, 1986) variabili categoricamente in scala (*Banker e Morey*, 1986b), variabili fisse esogene (*Banker e Morey*, 1986), misure di efficienza allocative (*Banker*, 1985; *Banker e Maindiratta*, 1998), errori di misurazione random (*Banker, Datar e Kemerer*, 1991; *Banker, Datar e Rajan*, 1987) e funzioni di produzione separabili (*Banker*, 1985; *Banker, Das e Datar*, 1989).⁶⁷

⁶⁶ Vedi modello BBC (1984).

⁶⁷ Vedi Banker, R.D., (1992) "Selection of efficiency evaluation models". Contemporary accounting Research. Vol 9. N. 1. Pag 343-355.

Non discuterò degli altri modelli in questa sede, bensì evidenzierò che ciascuno è disegnato per ambienti di produzione specifici e un ricercatore deve selezionare il modello che è appropriato per l'applicazione trattata.

2.4 Modello CCR

Questo paragrafo tratta uno dei modelli più elementari DEA, il modello CCR, proposto da *Charnes, Cooper e Rhodes* nel 1987.

Per ciascuna DMU, abbiamo formato l'*input* e l'*output* virtuale con pesi (ancora sconosciuti) (v_i) e (u_r):

$$\text{input virtuali} = v_1x_{1o} + \dots + v_mx_{mo}$$

$$\text{output virtuali} = u_1y_{1o} + \dots + u_sy_{so}$$

poi si è cercato di determinare il peso, utilizzando la programmazione lineare in modo da massimizzare il rapporto:

$$\frac{\text{Output virtuale}}{\text{Input virtuale}}$$

I pesi ottimali possono (e generalmente) variano da una DMU ad un'altra DMU.⁶⁸ Ad ogni DMU viene assegnato il miglior *set* di pesi con valori che possono variare da una DMU all'altra.⁶⁹

⁶⁸ I "pesi" in DEA sono derivati dai dati invece di essere fissato in anticipo.

⁶⁹ Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston.

Per misurare l'efficienza di ciascuna DMU-jesima ho quindi bisogno di n ottimizzazioni, una per ogni DMU da valutare. Consideriamo la DMU-jesima la DMU da valutare in qualsiasi processo come DMU_o dove "o" spazia da 1,2...n. Risolviamo il seguente problema di programmazione frazionaria per ottenere i valori per i "pesi" di *input* (v_i) ($i = 1, \dots, m$) e i "pesi" di *output* (u_r) ($r = 1, \dots, s$) come variabili.

$$(FP_o) \max_{v,u} \theta = \frac{u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \dots + v_m x_{mo}} \quad (2.9)$$

$$\text{Sottoposto ai vincoli} \quad \frac{u_1 y_{1j} + \dots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj}} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.10)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (2.11)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_s \geq 0 \quad (2.12)$$

I vincoli fanno sì che il rapporto tra l'*output* virtuale e l'*input* virtuale non debba superare 1 per ogni DMU. L'obiettivo è quello di ottenere i pesi (v_i) e (u_r) che massimizzino il rapporto della DMU_o , la DMU in corso di valutazione.

In virtù di quanto contiene, il valore obiettivo ottimale θ^* è al massimo 1. Matematicamente, il vincolo di non negatività (2.11) non è sufficiente affinché i termini frazionari nella (2.10) abbiano un valore positivo.

Noi da questo momento non trattiamo l'assunzione nella forma matematica esplicita; abbiamo posto il problema in termini manageriali assumendo che tutti gli *output* e gli *input* abbiano un certo valore diverso da zero: questo va a riflettersi nei pesi u_r e v_i .

● **Da Programmazione Frazionaria a Lineare**

Ora sostituiamo la programmazione frazionaria precedente (FP_o) nella seguente programmazione lineare (LP_o).⁷⁰

$$(LP_o) \max_{\mu, v} \theta = \mu_1 y_{1o} + \dots + \mu_s y_{so} \quad (2.13)$$

$$\text{Sottoposto} \quad v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \quad (2.14)$$

$$\text{ai vincoli} \quad \mu_1 y_{1j} + \dots + \mu_s y_{sj} \leq v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj} \quad (2.15)$$

$$(j = 1, \dots, n)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (2.16)$$

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \geq 0 \quad (2.17)$$

Teorema 2.1 La programmazione frazionaria (FP_o) è equivalente alla programmazione lineare (LP_o).

Sotto l'ipotesi non zero di v e $X > 0$, il denominatore del vincolo di (FP_o) è positivo per ogni j , e quindi si ottiene la (2.15) moltiplicando entrambi i lati del (2.10) per il denominatore. Quindi, notiamo che un numero frazionario è invariante rispetto alla moltiplicazione sia del numeratore che del denominatore per lo stesso numero diverso da zero.

Dopo aver fatto questa moltiplicazione, abbiamo impostato il dominatore di (2.9) pari a 1, spostandolo in un vincolo, come avviene in (2.14), e massimizzato la conseguente (LP_o).

Lasciando che la soluzione opzionale (LP_o) sia ($v = v^*$, $\mu = \mu^*$) e il valore obiettivo ottimale θ^* .

⁷⁰ Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston.

La soluzione ($u = v^*$, $u = \mu^*$) è anche ottimale per (FP_o) , poiché la trasformazione di cui sopra è reversibile, in base alle ipotesi di cui sopra.

(FP_o) e (LP_o) hanno quindi gli stessi valori oggettivi dei θ^* ottimali.⁷¹

Notiamo anche che le misure di efficienza presentate sono "unità invarianti": sono, cioè, indipendenti dalle unità di misura utilizzate, nel senso che la moltiplicazione di ciascun *input* per una costante $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, e ogni *output* per una costante $p_r > 0$, $r = 1, \dots, s$, non cambia la soluzione ottenuta.

Dichiarato in forma precisa abbiamo:

Teorema 2.2 (Teorema di Invarianza dell'Unità) i valori ottimali di $\max \theta = \theta^*$ al punto (2.9) e (2.13) sono indipendenti dalle unità in cui vengono misurati gli *input* e di *output*, purché queste unità siano le stesse per ogni DMU.

Così, una persona può misurare gli *output* in miglia e gli *input* in galloni di benzina e litri di olio, mentre altre possono misurare queste stessi *output* e *input* in chilometri e litri. Essi, tuttavia, otterranno lo stesso valore di efficienza da (2.9) o (2.13) in sede di valutazione della stessa collezione di automobili.

Prima di procedere notiamo che (LP_o) può essere risolto con il semplice metodo della programmazione lineare. La soluzione opzionale può essere facilmente ottenuta trattando con il lato duale (LP_o) , come verrà spiegato in dettaglio successivamente.⁷²

In ogni caso, supponiamo di avere una soluzione ottimale (LP_o) , che noi rappresentiamo dalla (θ^*, v^*, u^*) dove v^* e u^* sono i valori con i vincoli indicati nella (2.16) e (2.17). Possiamo quindi identificare se l'efficienza CCR è stata raggiunta come segue:

⁷¹ Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston.

⁷² Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston.

Definizione 2.3 (Efficienza-CCR)

1. DMU_o è CCR-efficiente se $\theta^* = 1$ ed esiste almeno una coppia ottimale (v^*, u^*) , con $v^* > 0$ e $u^* > 0$.
2. In caso contrario, DMU_o , è il CCR-inefficiente.

Così, CCR-inefficiente significa che

- (i) $\theta^* < 1$ o
- (ii) $\theta^* = 1$ ed almeno un elemento (v^*, u^*) è uguale a zero per ogni soluzione ottimale (LP_o).

Ora osserviamo il caso in cui la DMU_o abbia $\theta^* < 1$ (CCR-inefficiente). Allora ci deve essere almeno un vincolo (o DMU) in (2.15) per cui il peso (v^*, u^*) produce uguaglianza tra lati destro e sinistro, in caso contrario, θ^* potrebbe essere ampliato.

Poniamo che l'insieme di tali $j \in \{1, \dots, n\}$ sia:

$$E'_o = \{j: \sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} = \sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}\} \quad (2.18)$$

Il sottoinsieme E_o di E'_o composto da DMU CCR-efficienti, è chiamato il “riferimento stabilito” o il “gruppo dei pari” alla DMU_o . È l'esistenza di questa raccolta di DMU efficienti che costringe la DMU_o ad essere inefficiente.

L'insieme attraversato da E_o si chiama frontiera efficiente di DMU_o .

2.4.1 Il significato dei pesi ottimali

$L(v^*, u^*)$ è ottenuto come soluzione ottimale per (LP_o) in una serie di pesi ottimali per la DMU_o . Il rapporto di scala viene valutato da:

$$\theta^* = \frac{\sum_{r=1}^S u_r^* y_{ro}}{\sum_{i=1}^M v_i^* x_{io}} \quad (2.19)$$

dalla (2.14) il denominatore è uguale a 1 e quindi:

$$\theta^* = \sum_{r=1}^S u_r^* y_{ro} \quad (2.20)$$

Come accennato in precedenza (v^* , u^*) sono l'insieme di pesi più favorevoli per la DMU_o nel senso di massimizzare il rapporto di scala.

v_i^* è il peso ottimale per l'elemento di *input* i e la sua grandezza esprime quanto altamente l'articolo è valutato, relativamente parlando. Allo stesso modo, u_r^* fa lo stesso per l'elemento di *output* r .

Inoltre, se si esamina ogni elemento $v_i^* x_{io}$ di *input* virtuale:

$$\sum_{i=1}^M v_i^* x_{io} (= 1) \quad (2.21)$$

possiamo vedere l'importanza relativa di ciascun elemento facendo riferimento al valore di ogni $v_i^* x_{io}$. La stessa situazione vale per $u_r^* y_{ro}$ dove l' u_r^* fornisce una misura del contributo relativo y_{ro} al valore complessivo di θ^* .

Questi valori mostrano non solo quali elementi contribuiscono alla valutazione della DMU_o, ma anche in che misura lo fanno.

▪ Esempio: due *Input-un Output*

Tabella 2.1 mostra 6 DMU con 2 *input* e 1 *output* in cui il valore di *output* è posto pari a 1 per ogni DMU.⁷³

⁷³ Esempio tratto da: Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston. Pag 27 e seg.

Tabella 2.1: Dati Esempio due *input*-un *output*

| | DMU | A | B | C | D | E | F |
|---------------|-------|---|---|---|---|---|----|
| <i>Input</i> | x_1 | 4 | 7 | 8 | 4 | 2 | 10 |
| | x_2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| <i>Output</i> | y | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(1) Il programma lineare per DMU-A è:

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle \quad & \max \quad \theta = u \\
 \text{Subject to} \quad & 4v_1 + 3v_2 = 1 \\
 & u \leq 4v_1 + 3v_2 \text{ (A)} \quad \quad u \leq 7v_1 + 3v_2 \text{ (B)} \\
 & u \leq 8v_1 + v_2 \text{ (C)} \quad \quad u \leq 4v_1 + 2v_2 \text{ (D)} \\
 & u \leq 2v_1 + 4v_2 \text{ (E)} \quad \quad u \leq 10v_1 + v_2 \text{ (F)}
 \end{aligned}$$

in cui tutte le variabili sono vincolate ad essere non negative.

Questo problema può essere risolto da un codice di programmazione lineare. Può anche essere risolto semplicemente cancellando v_2 dalle disequazioni inserendo $v_2 = (1 - 4v_1)/3$ e osservando il rapporto tra v_1 e u . La (unica) soluzione ottimale è $(v_1^* = 0,01429, v_2^* = 0,1429, u^* = 0,8571, \theta^* = 0,8571)$ e l'efficienza-CCR di A è 0,8571.

Applicando la soluzione ottimale ai vincoli di cui sopra, il riferimento impostato per A è risultato essere $E_A = \{D, E\}$.

(2) Il programma lineare per la DMU-B è:

$$\begin{aligned}
 \langle B \rangle \quad & \max \quad \theta = u \\
 \text{Subject to} \quad & 7v_1 + 3v_2 = 1 \\
 & u \leq 4v_1 + 3v_2 \text{ (A)} \quad \quad u \leq 7v_1 + 3v_2 \text{ (B)} \\
 & u \leq 8v_1 + v_2 \text{ (C)} \quad \quad u \leq 4v_1 + 2v_2 \text{ (D)}
 \end{aligned}$$

$$u \leq 2v_1 + 4v_2 \text{ (E)} \quad u \leq 10v_1 + v_2 \text{ (F)}$$

La (unica) soluzione ottimale è $(v_1^*=0,0526, v_2^*=0,2105, u^*=0,6316, \theta^*=0,6316)$, il CCR-efficienza di B è 0,6316, e l'insieme di riferimento è $E_B = \{C, D\}$.

Ora osserviamo la differenza tra i pesi ottimali $v_1^*=0,0526$ e $v_2^*=0,2105$.

Il rapporto $v_2^*/v_1^* = 0,2105/0,0526 = 4$ suggerisce che sia vantaggioso per B pesare l'*Input* x_2 quattro volte di più dell'*Input* x_1 al fine di massimizzare la scala di rapporto misurato dall'*input* virtuale vs l'*output* virtuale.⁷⁴ Questi valori hanno ruoli come misura della sensibilità dei punteggi di efficienza in riferimento alle variazioni di elementi di *input*. Quindi notiamo che la nostra analisi mostra che una riduzione dell'*Input* x_2 ha un effetto maggiore sull'efficienza rispetto a una riduzione di *Input* x_1 .

(3) Una soluzione ottimale per C è $(v_1^*=0,0833, v_2^*=0,3333, u^*=1, \theta^*=1)$ e C è CCR-efficiente per la definizione 2.1.

Allo stesso modo, D ed E sono CCR-efficienti.

(4) Il programma lineare per DMU F è:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle \max \quad & \theta = u \\ \text{Subject to} \quad & 10v_1 + v_2 = 1 \\ & u \leq 4v_1 + 3v_2 \text{ (A)} \quad u \leq 7v_1 + 3v_2 \text{ (B)} \\ & u \leq 8v_1 + v_2 \text{ (C)} \quad u \leq 4v_1 + 2v_2 \text{ (D)} \\ & u \leq 2v_1 + 4v_2 \text{ (E)} \quad u \leq 10v_1 + v_2 \text{ (F)} \end{aligned}$$

⁷⁴ Esempio tratto da: Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston. Pag 27 e seg.

La soluzione ottimale per F è con $(v_1^*=0, v_2^*=1, u^*=1, \theta^*=1)$ e con $\theta^*=1$, F sembra efficiente. Tuttavia, notiamo che $v_1^*=0$. Assegniamo un piccolo valore positivo ε a v_1 e osserviamo il cambiamento in θ^* . Cioè, usiamo i dati per F e con $10\varepsilon + v_2 = 1$ per ottenere $v_2 = 1 - 10\varepsilon$. Inserendo questo valore delle diseguaglianze di cui sopra, si ottengono i seguenti vincoli.

$$u \leq 3 - 26\varepsilon \quad (A) \qquad u \leq 3 - 23\varepsilon \quad (B)$$

$$u \leq 1 - 2\varepsilon \quad (C) \qquad u \leq 2 - 16\varepsilon \quad (D)$$

$$u \leq 4 - 38\varepsilon \quad (E) \qquad u \leq 1 \quad (F)$$

Notando che ε è un piccolo valore positivo, il minimo dei termini di destra viene raggiunto con

$$u = 1 - 2\varepsilon$$

Pertanto, per qualsiasi $\varepsilon > 0$ ne consegue che $\theta^* = 1 - 2\varepsilon < 1$. Pertanto, v_1 deve essere zero in modo che F abbia $\theta^* = 1$. Possiamo quindi concludere che F è CCR-inefficiente da Definizione 2.1.

Inoltre, esaminiamo l'inefficienza di F confrontando F con C. C ha *Input* $x_1 = 8$ e *Input* $x_2 = 1$, mentre F ha *Input* $x_1 = 10$ e *Input* $x_2 = 1$. F ha 2 unità di eccesso di *Input* x_1 rispetto a C.

Questa carenza è nascosta perché la soluzione ottimale costringe il peso dell'*Input* x_1 a zero ($v_1^*=0$). C è nel *set* di riferimento di F e quindi dal diretto confronto possiamo identificare il fatto che F ha utilizzato una quantità eccessiva di questo *input*.

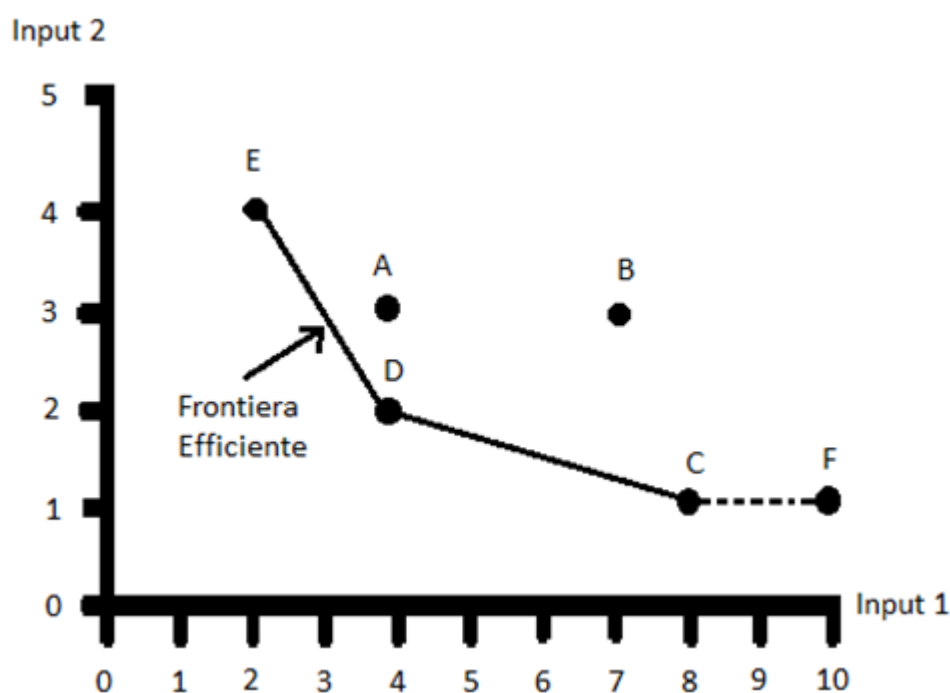
Non è sempre facile vedere un tale eccesso di *input* (o una carenza in output) dalla soluzione ottima del modello CCR. Una DMU come F, con $\theta^* = 1$ e con un eccesso di *input* e/o una carenza di *output*, si definisce con “rapporto efficiente ma mix inefficiente”.

La tabella 2.4 mostra la CCR-efficienza (θ^*) dell'esempio 2.2 e la Figura 2.2 illustra la frontiera efficiente.⁷⁵

Tabella 2.2: Risultati Esempio due *Input-un Output*

| DMU | x1 | x2 | y | CCR(θ^*) | Insieme di riferimento | v1 | v2 | u |
|-----|----|----|---|-------------------|------------------------|-------|-------|-------|
| A | 4 | 3 | 1 | 0,8571 | D E | .1429 | .1429 | .8571 |
| B | 7 | 3 | 1 | 0,6316 | C D | .1526 | .2105 | .6316 |
| C | 8 | 1 | 1 | 1 | C | .0833 | .3333 | 1 |
| D | 4 | 2 | 1 | 1 | D | .1667 | .1667 | 1 |
| E | 2 | 4 | 1 | 1 | E | .2143 | .1429 | 1 |
| F | 10 | 1 | 1 | 1 | C | 1 | 1 | 1 |

Figura 2.1: Rappresentazione grafica Esempio due *Input-un Output*



Fonte: Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000).

⁷⁵ Esempio tratto da: Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston. Pag 27 e seg.

2.4.2 Attività di produzione

D'ora in poi assumeremo che i dati siano semi positivi; cioè assumiamo che alcuni (ma non tutti) gli *input* e *output* siano positivi. Questo ci permetterà di affrontare le applicazioni che coinvolgono i dati uguali a zero in *input* e /o *output*. Sarà introdotto anche l'insieme delle possibilità produttive composto da questi dati di *input* e di *output* (X, Y) . Il problema duale del modello CCR verrà costruito e sarà mostrato che il problema duale valuta l'efficienza basandosi sul problema di programmazione lineare applicata al *set* di dati (X, Y) .

L'efficienza-CCR sarà ridefinita, tenendo conto di tutti gli eccessi e le carenze di *input* e *output*.

Una versione del modello CCR mira a minimizzare gli *input* soddisfacendo almeno il dato livello di *output*, questo è chiamato il modello *Input-Oriented*. Vi è un altro tipo di modello chiamato modello *Output-Oriented* che tenta di massimizzare la produzione senza richiedere di più dei valori di *input* osservati.⁷⁶

- **Insieme delle possibilità produttive**

Abbiamo avuto a che fare con le coppie di vettori di *input* e di *output* positivi (x_j, y_j) ($j = 1, \dots, n$) di n DMU. Tutti i dati sono assunti essere non negativi ma almeno un componente di ogni vettore di *output* e *input* è positivo. Ci riferiamo a questa come “semi positività” con una caratterizzazione matematica data da:

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, \quad x_j \neq 0 && \text{e} \\ y_j &\geq 0, \quad y_j \neq 0 && \text{per } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

⁷⁶ Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). “Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software”. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Pertanto, ogni DMU dovrebbe avere almeno un valore positivo in *input* e *output*. Chiameremo un paio di vettori semi positivi, tali che *input* $x \in R^m$ e *output* $y \in R^s$, un'“attività” e li esprimeremo con la notazione (x, y) . I componenti di ogni coppia di tale vettore possono essere considerati come un punto orthant positivo in uno spazio vettoriale $(m + s)$ lineare in cui m e s specificano il numero di dimensioni necessarie per esprimere, rispettivamente, *input* and *output*. L'insieme delle attività fattibili è chiamato il “set delle produzioni possibili” e viene indicato con P . Postuliamo di seguito:

Proprietà di P (il set delle produzioni possibili)

- A1. Le attività osservate (x_j, y_j) ($j = 1, \dots, n$) appartengono a P .
- A2. Se un'attività (x, y) appartiene a P , allora l'attività (tx, ty) appartiene a P per ogni positivo scalare t . Chiamiamo questa proprietà assunzione di "rendimenti di scala costanti".
- A3. Per un'attività (x, y) in P , qualsiasi attività semi positiva (\bar{x}, \bar{y}) con $\bar{x} \geq x$ e $\bar{y} \leq y$ è inclusa in P . Cioè, qualsiasi attività con l'*input* non inferiore di x in ogni componente e con *output* non maggiore di y in ogni componente è fattibile.
- A4. Qualsiasi combinazione lineare semi positiva delle attività in P appartiene a P .

Organizzando il set di dati in matrici $X = (x_j)$ e $Y = (y_j)$, possiamo definire l'insieme delle possibilità produttive P che soddisfa le proprietà da A1 a A4

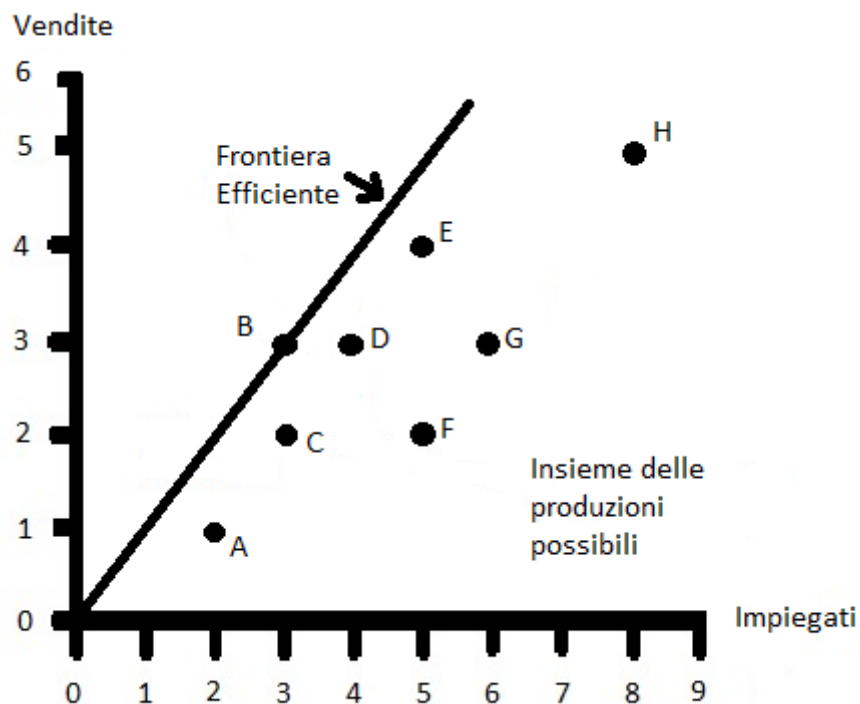
$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\} \quad (2.22)$$

dove λ è vettore semi positivo in R^n .

La Figura 2.2 mostra un tipico insieme di produzioni impostate in due dimensioni per il caso singolo *input* e singolo *output*, in modo che $m = 1$ e $s = 1$, rispettivamente.

In questo esempio il *set* possibilità è determinato dalla B e il raggio dall'origine attraverso B è la frontiera efficiente.

Figura 2.2: Insieme delle Produzioni possibili



Fonte: Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000).

2.4.3 Il modello CCR e problema duale

Sulla base della matrice (X, Y) , il modello CCR è stato formulato nei paragrafi precedenti come un problema di PL con il vettore riga v per i moltiplicatori di

input e vettore riga u come moltiplicatori di *output*. Questi moltiplicatori sono trattati come variabili nel seguente problema di PL:⁷⁷

$$(LP_o) \max_{v,u} u y_o \quad (2.23)$$

$$\text{Sottoposto ai vincoli} \quad v x_o = 1 \quad (2.24)$$

$$-vX + uY \leq 0 \quad (2.25)$$

$$v \geq 0, u \geq 0 \quad (2.26)$$

Questa formulazione è l'equivalente di quella di 2.13-2.17, LP_o nel paragrafo precedente, che ora è espresso in notazione vettoriale-matriciale.

Il problema duale⁷⁸ di LP_o si esprime con un vero e proprio θ variabile e un vettore non negativo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ di variabili come segue:

$$(DLP_o) \quad \min_{\theta, \lambda} \theta \quad (2.27)$$

$$\text{Sottoposto ai vincoli} \quad \theta x_o - X\lambda \geq 0 \quad (2.28)$$

$$Y\lambda \geq y_o \quad (2.29)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (2.30)$$

Le corrispondenze tra vincoli e variabili nei modelli primale LP_o e duale DLP_o vengono visualizzate nella Tabella 2.3.

⁷⁷ Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston.

⁷⁸ Ogni problema duale ha un significato economico che permette di vedere il problema reale che ha originato il modello lineare sotto una diversa luce e può suggerire strategie di comportamento differenti. Ad esempio il duale, di un problema di definizione del mix di prodotti ottimi da produrre a risorse limitate volendo ottimizzare il profitto, può essere interpretato come il problema di determinazione del minimo prezzo a cui conviene vendere le risorse disponibili piuttosto che produrre.

Tabella 2.3: Corrispondenze tra primale e duale.

| Vincolo (LP _o) | Variabile Duale (DLP _o) | Vincolo (DLP _o) | Variabile Primale (LP _o) |
|-------------------------------|--|--------------------------------|---|
| $vx_o = 1$ | θ | $\theta x_o - X\lambda \geq 0$ | $v \geq 0$ |
| $-vX + uY \leq 0$ | $\lambda \geq 0$ | $Y\lambda \geq y_o$ | $u \geq 0$ |

La DLP_o ha una soluzione fattibile $\theta = 1$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_j = 0$ ($j \neq o$). Da qui la θ ottimale, indicata con θ^* , non è superiore a 1.

D'altra parte, a causa dell'assunzione no-zero (semi positiva) per i dati, il vincolo (2.29) forza λ ad essere diverso da zero perché $y_o \geq 0$ e $y_o \neq 0$.

Quindi, dalla (2.28), θ deve essere maggiore di zero. Mettendo tutto insieme, abbiamo $0 < \theta^* < 1$. Ora osserviamo la relazione tra la possibilità di produzione P e (DLP_o).

I vincoli di (DLP_o) richiedono che l'attività $(\theta x_o, y_o)$ appartenga a P, mentre l'obiettivo cerca il θ minimo che riduce il vettore degli *input* x_o radialmente a θx_o pur rimanendo in P. Nella (DLP_o), stiamo cercando per un'attività in P che garantisce almeno il livello di *output* y_o della DMU_o in tutti i componenti, riducendo il vettore di *input* x_o proporzionalmente (radialmente) al valore più piccolo possibile. Sotto le ipotesi del paragrafo precedente, si può dire che $(X\lambda, Y\lambda)$ sovraperforma $(\theta x_o, y_o)$ quando $\theta^* < 1$.

Con riferimento a questa proprietà, definiamo gli eccessi di *input* $s^- \in R^m$ e le carenze di *output* $s^+ \in R^s$ e li identifichiamo come vettori "scarto":

$$s^- = \theta x_o - X\lambda, \quad s^+ = Y\lambda - y_o \quad (2.31)$$

con $s^- \geq 0, s^+ \geq 0$ per ogni soluzione fattibile (θ, λ) di (DLP_o).

Per scoprire i possibili eccessi di *input* e carenze di *output*, risolviamo il seguente problema di PL in due fasi.

Fase 1

Risolviamo (DLP_o). Lasciate che il valore obiettivo ottimale sia θ^* . Per il teorema di dualità della programmazione lineare, θ^* è pari al valore obiettivo ottimale di (LP_o) ed è il valore di efficienza-CCR, chiamato anche "Efficienza-Farrell".⁷⁹ Questo valore di θ^* è incorporato nella seguente estensione della fase II di (DLP_o).

Fase 2

Utilizzando la nostra conoscenza di θ^* , risolviamo la seguente LP utilizzando (λ, s^-, s^+) come variabili:

$$\max_{\lambda, s^-, s^+} \omega = es^- + es^+ \quad (2.32)$$

$$\text{Sottoposto ai vincoli } s^- = \theta^* x_o - X\lambda \quad (2.33)$$

$$s^+ = Y\lambda - y_o \quad (2.34)$$

$$\lambda \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0 \quad (2.34)$$

dove $e = (1, \dots, 1)$ (un vettore di uno) in modo che

$$es^- = \sum_{i=1}^m s_i^- \quad e$$

$$es^+ = \sum_{r=1}^s s_r^+$$

L'obiettivo della fase 2 è quello di trovare una soluzione che massimizza la somma degli eccessi di *input* e carenze di *output* mantenendo $\theta = \theta^*$.

⁷⁹ Vedi M.J. Farrell (1957).

Definizione 2.3 (Soluzione max-scatti, Attività Zero-scatti)

Una soluzione ottimale $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ della fase 2 si chiama la soluzione max-scatti. Se la soluzione max-scatti soddisfa $s^{-*} = 0$ e $s^{+*} = 0$ allora si chiama zero Scatti.

Definizione 2.4 (Efficienza-CCR, Efficienza radiale, Efficienza tecnica) Se una soluzione ottimale $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ delle due LP di cui sopra soddisfa $\theta^* = 1$ ed è zero scatti ($s^{-*} = 0, s^{+*} = 0$), allora la DMU_o è definita CCR-efficiente.

In caso contrario, la DMU_o è chiamata CCR-inefficiente, infatti

$$(i) \theta^* = 1^{80}$$

(ii) tutti i scatti sono pari a zero

devono essere entrambi soddisfatti perché la piena efficienza sia raggiunta.

La condizione (i) e (ii) nel loro insieme descrivono quella che viene anche chiamata efficienza "*Pareto-Koopmans*", o "Efficienza forte".⁸¹

Ora dimostriamo che la Definizione 2.4 implica la Definizione 2.3

- (i) se $\theta^* < 1$, allora la DMU_o è CCR-inefficiente da Definizione 2.3, dal momento che (LP_o) e (DLP_o) hanno lo stesso valore obiettivo ottimale θ^* .
- (ii) se $\theta^* = 1$ ed ha uno scarto non-zero ($s^{-*} \neq 0, s^{+*} \neq 0$), allora, dalla condizione complementare di cui sopra, gli elementi di v^* o u^* corrispondono a scatti positivi e devono, invece, essere zero. Così, la DMU_o è CCR-inefficiente per Definizione 2.3

⁸⁰ E 'indicato anche come "efficienza tecnica" in quanto un valore di $\theta^* < 1$ significa che tutti gli ingressi possono essere ridotti contemporaneamente senza alterare la miscela (= le proporzioni) in cui sono utilizzati.

⁸¹ Vedi "Definizione 2.1" nel paragrafo 2.1.

- (iii) Infine se $\theta^* = 1$ e lo scarto è zero, allora, dal "Teorema di complementarità forte" di (LP_o) è assicurata una soluzione ottimale positiva (v^*, u^*) e quindi la DMU_o è CCR-efficiente da Definizione 2.3.

Il contrario è vero anche dalla relazione complementare e dal teorema di complementarità forte tra (v^*, u^*) e (s^{*-}, s^{*+}) .

2.4.4 Modello *Output Oriented*

Fino a questo punto, abbiamo avuto a che fare principalmente con un modello il cui obiettivo è ridurre al minimo gli *input*, mentre la produzione rimane ai livelli di *output* dati. Questo tipo di modello è chiamato *input-oriented*. C'è un altro tipo di modello che tenta di massimizzare le uscite, con l'utilizzo di non più della quantità osservata di qualsiasi *input*. Questo è indicato come modello orientato al risultato (*output-oriented*), formulato come:

$$(DLPO_o) \quad \max_{\eta, \mu} \eta \quad (2.35)$$

$$\text{Sottoposto ai vincoli} \quad x_o - X\mu \geq 0 \quad (2.36)$$

$$\eta y_o - Y\mu \leq 0 \quad (2.37)$$

$$\mu \geq 0 \quad (2.38)$$

Una soluzione ottimale di $(DLPO_o)$ può essere derivata direttamente da una soluzione ottimale del modello di *input-oriented* CCR data in (2.27) - (2.30) come segue.

Definiamo:

$$\lambda = \mu/n, \quad \theta = 1/n \quad (2.39)$$

Poi (DLPO_o) diventa:

$$\begin{aligned}
 & \text{(DLP}_o\text{)} \min_{\theta, \lambda} \theta \\
 & \text{Sottoposto ai vincoli} \quad \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\
 & \quad y_o - Y\lambda \leq 0 \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

che è il modello CCR *input-oriented*. Così, una soluzione ottimale del modello *output-oriented* si riferisce a quella del modello *input-oriented* tramite:⁸²

$$n^* = 1/\theta^*, \quad \mu^* = \lambda^*/\theta^* \quad (2.40)$$

Lo scarto (t^-, t^+) del modello *output-oriented* è definito da:

$$\begin{aligned}
 X\mu + t^- &= x_o \\
 Y\mu - t^+ &= ny_o
 \end{aligned}$$

Questi valori sono anche in relazione al modello di *input-oriented* tramite:

$$t^- = s^-/\theta^*, \quad t^+ = s^+/\theta^*. \quad (2.41)$$

Ora, $\theta^* \leq 1$, ritornando così a (2.39), soddisfa:

$$n^* \geq 1 \quad (2.42)$$

⁸² Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). "Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software". Kluwer Academic Publishers, Boston.

Più alto è il valore di n^* , meno efficiente è la DMU. θ^* esprime il tasso di riduzione degli *input*, mentre descrive il rapporto di ingrandimento degli *output*. Dalle relazioni di cui sopra, possiamo concludere che un modello CCR *input-oriented* sarà efficace per qualsiasi DMU se e solo se è efficace anche quando il modello CCR *output-oriented* viene utilizzato per valutare le sue prestazioni.

Il problema duale di (DLPO_o) è espresso nel seguente modello, con i componenti dei vettori p e q usati come variabili.

$$(LPO_o) \quad \min_{p,q} px_o \quad (2.43)$$

$$\text{Sottoposto ai vincoli} \quad qy_o = 1 \quad (2.44)$$

$$-pX + qY \leq 0 \quad (2.45)$$

$$p \geq 0, q \geq 0 \quad (2.46)$$

Sul lato moltiplicatore abbiamo:

Teorema 3.5 Poniamo che una soluzione ottimale di (LP_o) sia (v^*, u^*) , allora una soluzione ottimale del modello *output-oriented* è ottenuto da

$$p^* = v^*/\theta^*, \quad q^* = u^*/\theta^*. \quad (2.47)$$

Dimostrazione: È chiaro che (p^*, q^*) è fattibile per (LPO_o). La sua ottimalità deriva dalla seguente equazione.

$$p^* x_o = v^* x_o / \theta^* = n^* \quad (2.48)$$

Così, la soluzione del modello CCR *output-oriented* può essere ottenuta da quella del modello CCR *input-oriented*. Il miglioramento, utilizzando questo modello, è espresso da:

$$\hat{x}_o \leftarrow x_o - t^* \quad (2.49)$$

$$\hat{y}_o \leftarrow n^* y_o + t^{+*} \quad (2.50)$$

Facendo un ulteriore passo avanti si nota che è equivalente al seguente problema di programmazione frazionaria:

$$\min_{\pi, \rho} \frac{\pi x_o}{\rho y_o} \quad (2.51)$$

$$\text{Sottoposto ai vincoli} \quad \frac{\pi x_j}{\rho y_j} \geq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.52)$$

$$\pi \geq 0, \rho \geq 0 \quad (2.53)$$

In altri termini, ci siamo scambiati il numeratore e il denominatore della (2.9) e (2.10) come indicato all'inizio del paragrafo e minimizzato la funzione obiettivo. È quindi del tutto naturale che le soluzioni risultano essere legate da una semplice regola. Questa trasformazione matematica non implica che non vi sia alcun significato gestionale da assegnare alla scelta dei modelli poiché, tra l'altro, varie correzioni possono essere associate a massimizzazione di *output* e minimizzazione di *input*. La differenza può essere notevole, quindi questa scelta merita sempre considerazione.

Capitolo 3

Free Disposal Hull

3.1 Introduzione

Tra le diverse ipotesi formulate circa la tecnologia, nella definizione del *set* di possibilità di produzione affrontato da una ditta, la più forte è l'assunzione di convessità. Chiaramente, la fattibilità di qualsiasi fascia *input-output* (x_j, y_j) è dimostrata dal fatto che in qualche azienda è stata effettivamente osservata la produzione di *output* y_j da *input* x_j .

In modo simile, la libera disposizione di *input* od *output* può facilmente essere giustificata intuitivamente. Entrambe posano sulla possibilità di un minore, invece che pieno, utilizzo di risorse da parte di un'impresa.

Dopotutto, se un'impresa ha prodotto l'*output* y_0 dall'*input* x_0 , potrebbe produrre la stesso *output* da un fascio di entrata più grande x_1 lasciando parte degli *input* inutilizzati. Allo stesso modo, si potrebbe produrre meno *output* rispetto y_0 dall'*input* x_0 mantenendo parte delle sue entrate inattive.⁸³

Al contrario, l'assunzione di convessità è molto più controversa.

Si consideri un esempio il caso di un *output-un input*. Supponiamo che due combinazioni osservate *input-output* siano $(x_0 = 5, y_0 = 8)$ e $(x_1 = 9, y_1 = 12)$. La convessità implica che la media semplice di questi due fasci $(x = 7, y = 10)$ sia fattibile. Si noti che non è intuitivamente ovvio, comunque, dai due fasci

⁸³ Tulkens H., (1993) "On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit", The Journal of Productivity Analysis, 4, 183-210.

osservati. Rispetto al più piccolo fascio *input-output*, questo pacchetto “media” utilizza una quantità maggiore di *input*. Ma l'*output* corrispondente è anche più grande e non è necessariamente producibile da questo livello di *input*. Analogamente, rispetto al fascio più grande, la media mira ad una quantità inferiore di *output*. Ma il livello di *input* è anche più piccolo e può non essere sufficiente per produrre questo *target* di *output*.

Così, la fattibilità del fascio medio non deriva da nessuna "prova a titolo di esempio". Ad un livello più astratto, la convessità dell'insieme delle possibilità produttive esclude un aumento marginale della produttività di qualsiasi *input*. In questo capitolo si considera una modifica del modello standard DEA chiamato *Free Disposal Hull* (FDH) la cui analisi fu introdotta da *Deprins, Simar e Tulkens* (1984) e in seguito sviluppata da *Tulkens* (1993). Questo approccio alternativo mantiene le ipotesi di monotonicità su *input* e *output*, ma rilascia l'ipotesi di convessità.

3.2 Cenni storici su FDH

In tutti gli studi empirici di efficienza produttiva, un ruolo fondamentale è giocato dalla scelta della "tecnologia di riferimento",⁸⁴ cioè, nel senso dato a questa espressione da *Grosskopf* (1986): le possibilità di produzione stabilite, la cui frontiera è utilizzata per valutare l'attività produttiva osservata. In molti casi, i risultati ottenuti sono infatti molto sensibili alle specifiche alternative di questa serie. Pur riconoscendo questo fatto, la letteratura non fornisce molte indicazioni sulla questione di come valutare l'adeguatezza delle scelte in questo senso.⁸⁵

⁸⁴ Grosskopf, S. (1986). "The role of the reference technology in measuring productive efficiency". *The Economic Journal*. 96, pp. 499-513.

⁸⁵ Tulkens H., (1993) "On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit", *The Journal of Productivity Analysis*, 4, 183-210.

In *Deprins, Simar, e Tulkens* (1984), venne fatto uno sforzo in questa direzione. In tale documento, i risultati vennero presentati in merito a una serie di dati singoli (sulle operazioni postali) che sono stati ottenuti utilizzando le due principali tecnologie di riferimento del periodo: uno è l'insieme di produzione la cui frontiera è definita dal grafico di una funzione di produzione parametrica *Cobb-Douglas*, e l'altro è un insieme di produzione poliedrico convesso (con rendimenti di scala non crescenti) del tipo utilizzato nella DEA. Oltre a notare le differenze appena citate nelle misure di efficienza, il documento ha inoltre sottolineato che entrambe le stime delle tecnologie sono caratterizzate da un adattamento dei dati estremamente negativo. Ciò ha portato gli autori ad utilizzare una terza forma di tecnologia di riferimento, non molto considerata fino a quel momento ed etichettata in seguito come l'“insieme di produzione FDH” (*Free Disposal Hull*).⁸⁶ Questo modello ha dato a sua una volta risultati di efficienza molto diversi, ma si è dimostrato migliore secondo un punto di vista della forma dei dati.

Molti altri esperimenti vennero fatti con questo ultimo metodo, molti dei quali sono riportati in *Tulkens* (1986), *Thiry e Tulkens* (1988), e in *Tulkens* (1989).

3.3 Postulati alla base dei modelli FDH

Le possibilità produttive che la teoria economica associa con ogni attività produttiva sono sconosciute. Quindi, l'analista deve costruire il riferimento stabilito di cui ha bisogno.

Quando fa ciò dai dati statistici sugli *output* ottenuti e sugli *input* utilizzati, come di solito accade, il suo metodo poggia necessariamente su un rapporto tra le osservazioni statistiche ed elementi dell'insieme costruito. Poiché questo rapporto potrebbe richiedere diverse proprietà, il nostro principale obiettivo in

⁸⁶ Tulkens H., "On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit", *The Journal of Productivity Analysis*, 4, 183-210, 1993.

questo paragrafo è di far notare che, le differenze nelle proprietà di questo rapporto, hanno radici nelle differenze tra il modello alternativo utilizzato, e quindi tra i risultati ottenuti nella misura di efficienza.

Esprimendo questi postulati in termini di elementi che sono autorizzati ad appartenere al gruppo di riferimento, consideriamo la seguente lista (chiamato “piano di produzione” ogni vettore delle quantità di *input* (x) e *output* (y)). La produzione di riferimento stabilita dovrebbe contenere come suoi elementi:

Postulato 1: Determinetarità: tutti i piani di produzione osservati.

Postulato 2: Libero avvolgimento: qualunque piano di produzione non osservato con livelli di *output*, uguali o inferiori di quelli di alcuni piani di produzione osservati e più di almeno un ingresso, o con livelli di ingresso uguali o superiori a quelli di qualche piano di produzione osservata e meno di almeno un'uscita; o ancora con entrambe queste proprietà.

Postulato 3: Convessità: qualunque piano di produzione non osservato che è una combinazione convessa di alcuni piani di produzione indotti da 1 e 2.

Postulato 4: Convessità e proporzionalità parziale: qualunque piano di produzione, non osservato, che è in una combinazione convessa di alcuni piani di produzione indotti da 1 e 2, o di alcuni tali piani e l'origine dello spazio di *input-output*.

Postulato 5: Piena proporzionalità: qualunque piano di produzione non osservato che è proporzionale ad alcuni piani di produzione osservati indotti da 1 e 2.⁸⁷

⁸⁷ Vedi Tulkens, H. (1993). “On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit,” *Journal of Productivity Analysis* 4, 183– 210.

I postulati 1 e 2, insieme, sono sufficienti ad indurre un gruppo di riferimento che ha tutte le proprietà richieste dalla la teoria economica per un *set* di produzione. Poiché questi postulati fanno sì che questa serie sia la "*Free Disposal Hull*"⁸⁸ dei piani osservati, indichiamoli d'ora in poi come Y_{FDH} . Notare che il postulato 1 esclude elementi stocastici, come la maggior parte della letteratura non parametrica fa⁸⁹, contrariamente a quella parametrica⁹⁰.

Con il terzo postulato si aggiunge la convessità, si ottiene uno dei riferimenti sulla poliedrica convessa usato in DEA, proposti cioè in *Banker, Charnes e Cooper* (1984). Di solito viene interpretato come indicatore di rendimenti di scala variabili (prima in aumento poi in diminuzione), ed è quindi denominato qui come Y_{DEA-V} . Aggiungendo il postulato 4, produce un poliedro convesso con rendimenti non crescenti, denominato Y_{DEA-CD} .

Infine, con i postulati dall'1 al 5, il *set* di riferimento ottenuto è quello usato nella forma originale DEA proposta da *Charnes, Cooper e Rhodes* CCR (1978), lo stesso di quello di *Farrell* (1957). Esso ha la forma di un cono che parte dall'origine dello spazio di grandezza di *input* e di *output*, implicando rendimenti di scala costanti; indichiamolo qui come Y_{DEA-F} .

Il fatto che i postulati di sopra sono iscritti in ordine di resistenza crescente⁹¹ lo si può vedere dalle espressioni formali dei corrispondenti insiemi di riferimento, poiché possono essere ottenute la notazione teorico-insiemistica.⁹²

⁸⁸ Una terminologia introdotta da MacFadden [1978, pag. 8].

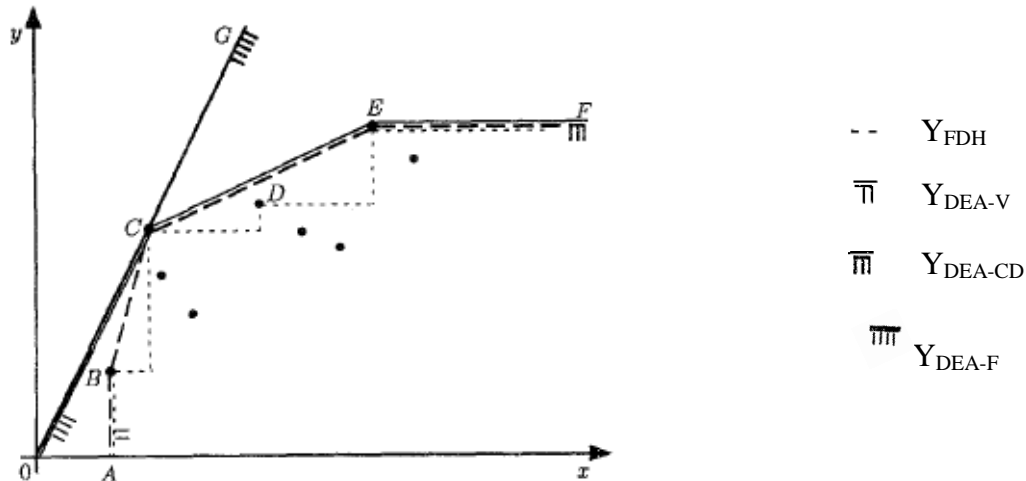
⁸⁹ Si tratta naturalmente di una limitazione molto grave che solo le opere recenti come la Land, Lovell, e Thore [1988] e Olesen e Petersen [1989] hanno tentato di superare.

⁹⁰ Almeno dal Aigner, Lovell e Schmidt (1977) e Meeusen, W. and Van den Broeck, J., (1977)

⁹¹ Ci siamo limitati a postulati che inducono insiemi di riferimento con frontiere non parametrici. Quando si utilizzano i metodi parametrici, un postulato centrale è tale che la frontiera di un insieme di riferimento sia il grafico di una funzione con parametri costanti, specificati a priori. Se uno qualsiasi dei postulati 2-5 si applichino anche interamente dipende dalle proprietà di questa funzione.

⁹² Vedi Deprins, D., Simar, L., And Tulkens, H. (1984), "Measuring Labor-Efficiency in Post Offices," in Marchand, M., Pestieau, P., and Tulkens, H. (eds.), *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurement*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. Pp 249-250.

Figura 3.1 Forme alternative di confine dell'insieme di produzione di riferimento quando siano costruite a partire dai dati osservati mediante FDH, DEA-V, DEA-CD e DEA-F.



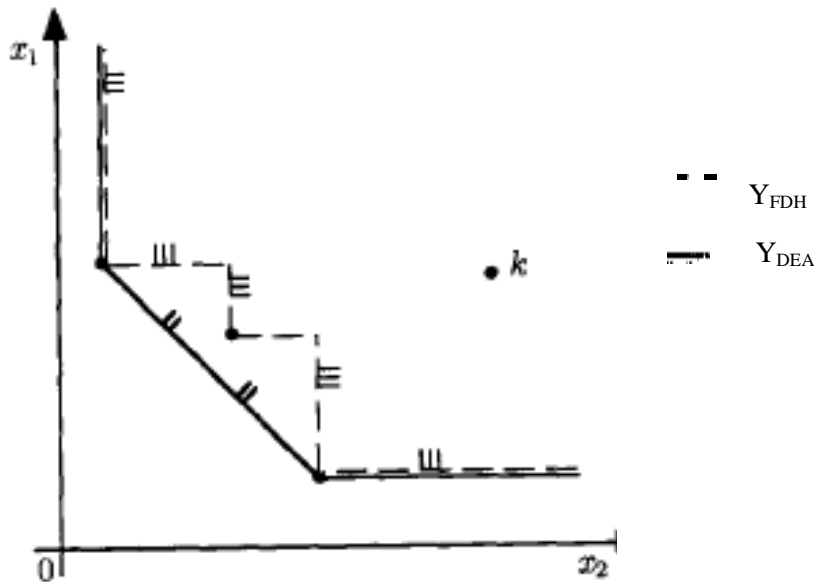
Fonte: Tulkens, H. (1993). "On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit," *Journal of Productivity Analysis* 4, 183– 210.

Qui dovremo dispensare noi stessi dall'esercizio, e renderci conto invece direttamente dalla Figura 3.1, per il caso di un *input* e di un *output*, che questi insiemi appaiono come uno nidificato nell'altro: Y_{FDH} (la cui frontiera è la linea di scala ABCDEF) è contenuta in Y_{DEA-V} (la quale frontiera lineare a tratti è ABCEF), che a sua volta è contenuto in Y_{DEA-CD} (la cui frontiera è adesso OCEF), e questo è ulteriormente contenuto in Y_{DEA-F} (la cui frontiera è OCG).⁹³

Le Figure 3.2 e 3.3 di seguito illustrano i diversi casi di *input-oriented* e *output-oriented* (dove i gruppi di riferimento DEA non possono essere distinti).

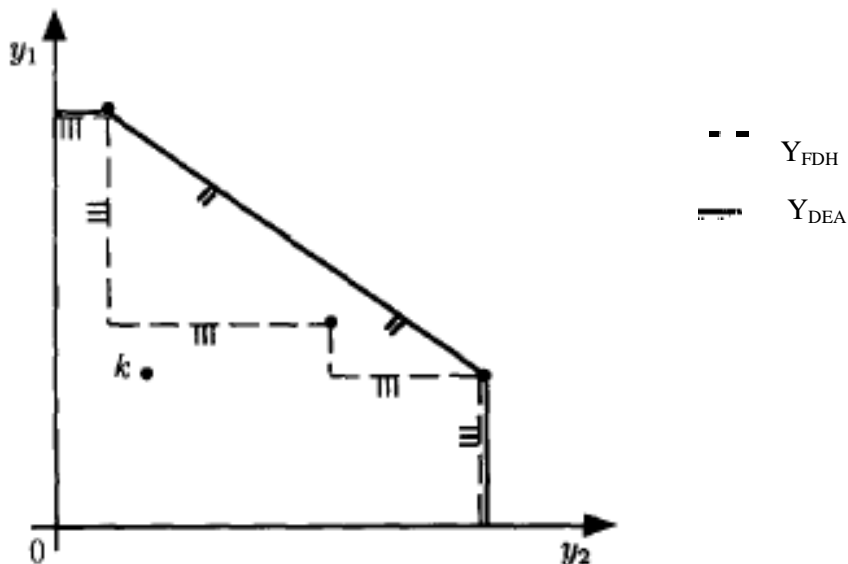
⁹³ Vedi Tulkens, H. (1993). "On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit," *Journal of Productivity Analysis* 4, 183– 210.

Figura 3.2. Insieme di riferimento dei requisiti di *input* costruiti dai dati osservati mediante FDH contro i tipi dal metodo DEA.



Fonte: *Tulkens, H. (1993). "On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit," Journal of Productivity Analysis 4, 183–210.*

Figura 3.3. Insieme di riferimento delle possibilità di *output* costruiti dai dati osservati mediante FDH contro i tipi dal metodo DEA.



Fonte: *Tulkens, H. (1993). "On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit," Journal of Productivity Analysis 4, 183–210.*

La presentazione fatta fino adesso dovrebbe rendere chiara quale sia la posizione della metodologia FDH rispetto alle altre usate in analisi di efficienza. In particolare, mostra che FDH è caratterizzato da postulati più deboli, sui quali l'insieme di riferimento è costruito dai dati statistici.⁹⁴

A questo punto, potremmo inoltre offrire già un commento sulla forma dei dati: è invece chiaro che mentre il cono di *Farrell* è il modo più grossolano per descrivere, o “raggruppare” l'insieme dei dati, la frontiera FDH è, all'estremo opposto, il modo più vicino tra le quattro frontiere che abbiamo considerato.

Questo è dovuto, essenzialmente, all'assenza dell'assunzione di convessità nella definizione dell'insieme FDH.⁹⁵

3.4 Modello *Free Disposal Hull*

Per analizzare il modello FDH iniziamo con una tecnologia singolo *input*-singolo *output*. Consideriamo una combinazione *input-output* (x_0, y_0) . Si noti che esso può o può non essere un piano di produzione fattibile. L'insieme di fasci di *input-output* dominati da (x_0, y_0) è

$$FDH(x_0, y_0) = \{(x, y): x \geq x_0; y \leq y_0\}. \quad (3.1)$$

Rispetto a (x_0, y_0) , ogni combinazione di *input-output* $(x, y) \in FDH(x_0, y_0)$ coinvolge non meno *input* e non più *output*. Il set $FDH(x_0, y_0)$ è il *Free Disposal Hull* (FDH) del fascio (x_0, y_0) . Ora, supponiamo che (x_0, y_0) è una combinazione di *input-output* fattibile. Poi, per la libera disponibilità degli *input* e degli *output*, tutti i fasci in FDH di questo fascio sono inoltre fattibili.

⁹⁴ FDH utilizza quindi assiomi ancora più parsimoniosi per caratterizzare un insieme delle possibilità di produzione rispetto a quelli proposti da Charnes et al. [1985, pag. 94].

⁹⁵ Vedi Tulkens, H. (1993). “On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit,” *Journal of Productivity Analysis* 4, 183– 210.

Si noti che per ogni $(x, y) \in FDH(x_0, y_0)$, almeno una delle seguenti relazioni seguenti dovrebbe essere vera:

- (a) $x > x_0, y = y_0$;
 - (b) $x = x_0, y < y_0$;
 - (c) $x > x_0, y < y_0$.
- (3.2)

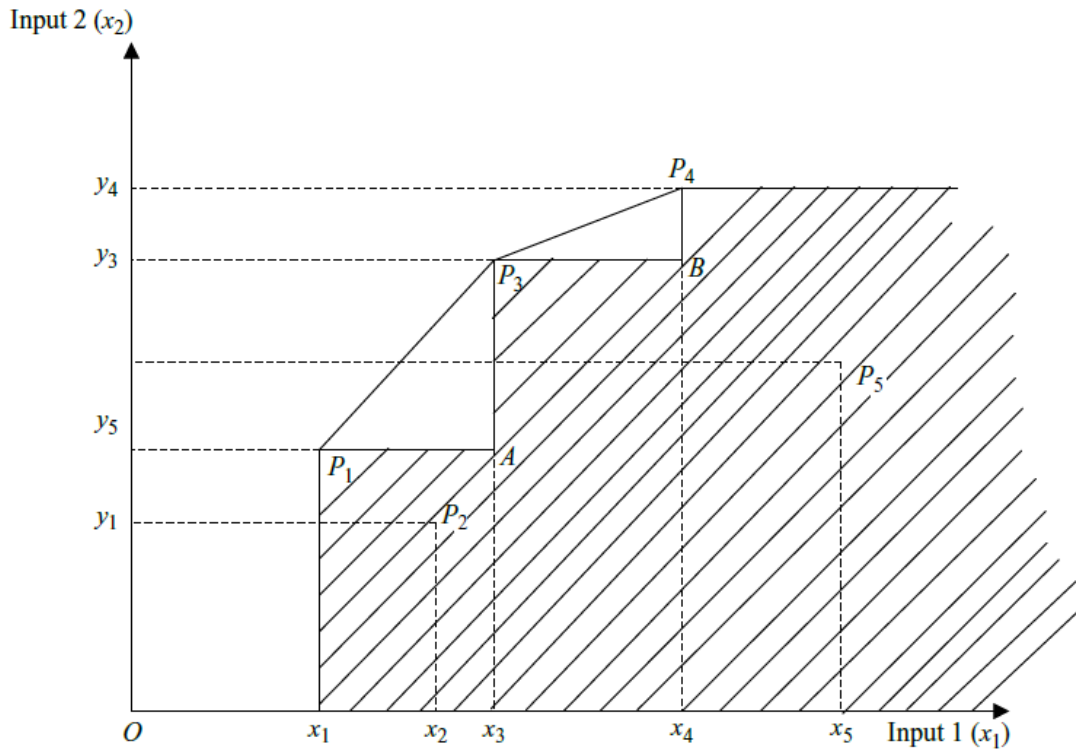
In (a), la libera disposizione degli *input* garantisce la fattibilità di (x, y) . In (b), la fattibilità deriva dalla libera disponibilità degli *output*. In (c), (x, y) è fattibile su entrambi i fronti. Si noti che rispetto ad ogni punto in questo FDH, il fascio (x_0, y_0) è più efficiente nel senso che o produce lo stesso *output* con meno *input* o produce più *output* dallo stesso *input*, o utilizza meno *input* per produrre più *output*. In questo senso, (x_0, y_0) domina (x, y) . Inoltre, poiché gli *input* vengono esauriti in stock nel processo di produzione, possono essere trattati come *output* negativi e il fascio di *input-output* (x, y) può essere espresso come “netput” fascio $(-x, y)$. Quindi, se (x, y) si trova nella FDH di (x_0, y_0) , allora $(-x_0, y_0) \geq (-x, y)$.

La Figura 3.4 illustra questo per il caso singolo *input*-singolo *output*. I punti da P1 verso P5 mostrano le combinazioni di *input-output* osservati (x_j, y_j) per $j = 1, 2, \dots, 5$. Poiché qualsiasi combinazione *input-output* (x_j, y_j) osservata è fattibile per ipotesi, ogni (x, y) che si trova nella FDH di qualsiasi combinazione di *input-output* osservata è anche fattibile. Tutti i punti nel quadrante sud est di qualsiasi punto P_j sono combinazioni di *input-output* fattibili. Così, l'area ombreggiata a destra della linea spezzata $x_1P_1AP_3BP_4$ rappresenta l'insieme delle possibilità produttive derivanti dalla FDH dei dati osservati.

La frontiera di questo insieme delle possibilità produttive è una funzione a gradino. Si noti che se avessimo assunto convessità, l'insieme delle possibilità di

produzione sarebbe stata il *Free Disposal Hull* convesso dei punti osservati e la frontiera sarebbe stata la linea spezzata di estensione $x_1P_1P_3P_4$.

Figura 3.4: Il *Free Disposal Hull* (FDH) di una combinazione data *input-output*.



Fonte: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and *Data Envelopment Analysis*". In "*Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research*". Cambridge University Press. pp 12-41.

Consideriamo ora la tecnologia *n-input*, *m-output*. La FDH di qualsiasi combinazione osservata *input-output* (x_j, y_j) è

$$FDH(x_j, y_j) = \{(x, y): x \geq x_j; y \leq y_j\}. \quad (3.3)$$

L'insieme delle possibilità produttive è l'unione della FDH di tutti i singoli fasci di *input-output* dei dati e può essere specificata come

$$T_{FDH} = \{(x, y): x \geq x_j; y \leq y_j; \text{ per ogni } j = 1, 2, \dots, N\}. \quad (3.4)$$

Alternativamente,

$$T_{FDH} = \left[(x, y): x \geq \sum_{j=1}^N \lambda_j x^j; y \leq \sum_{j=1}^N \lambda_j y^j; \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1; \right. \\ \left. \lambda_j \in \{0,1\}; j = 1, 2, \dots, N \right] \quad (3.5)$$

Si noti che ogni λ_j deve essere 0 o 1. Inoltre, λ_j è aggiunto fino ad 1. Quindi, una e una sola λ sarà pari all'unità e gli altri devono essere pari a 0. Quindi, T_{FDH} differisce dal *set* delle produzioni possibili per DEA (T_{DEA}) rispetto a come i λ_j sono limitati. Il *set* delle possibilità produttive FDH, T_{FDH} , produce le famiglie di insiemi di *input*.

$$V_{FDH}(y) = \{x: x \geq x^j; y \leq y^j; \text{ per ogni } j = 1, 2, \dots, N\} \quad (3.6a)$$

E gli insiemi di *output*

$$P_{FDH}(x) = \{y: y \geq y^j; x \leq x^j; \text{ per ogni } j = 1, 2, \dots, N\} \quad (3.6b)$$

L'efficienza tecnica dell'FDH *input-oriented* radiale della coppia *input-output* (x_0, y_0) è

$$\theta_{FDH}^* = \min \theta: (\theta x^0) \in V_{FDH}(y^0). \quad (3.7)$$

La corrispondente efficienza tecnica di FDH radiale *output-oriented* può essere definita in modo analogo.

Nel caso *multiplo-input*, è spesso più conveniente definire l'*input* Free Disposal Hull (FDH^I) di un fascio di ingresso x^0 come

$$FDH^I(x^0) = \{x: x \geq x^0\}. \quad (3.8)$$

Chiaramente, tutti i fasci all'interno di $FDH^I(x^0)$ sono più grandi rispetto al fascio x^0 in alcuni componenti, ma mai più piccoli. Quindi, per ogni fascio di uscita y , se (x^0, y) è fattibile, allora (x, y) è anche fattibile per ogni $x \in FDH^I(x^0)$.

▪ **Esempio: un *output*-due *input***

Si consideri il seguente esempio per il caso di un *output*, e due *input*. Supponiamo di osservare i fasci *input*-ouput per cinque imprese indicate nella Tabella 3.1⁹⁶.

Tabella 3.1 Esempio di dati per un *output*-due *input*

| Impresa | <i>Input</i> ₁ (x_1) | <i>Input</i> ₂ (x_2) | <i>Output</i> (y) |
|---------|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------|
| #1 | 4 | 10 | 8 |
| #2 | 7 | 12 | 10 |
| #3 | 6 | 9 | 7 |
| #4 | 10 | 8 | 6 |
| #5 | 8 | 10 | 7 |

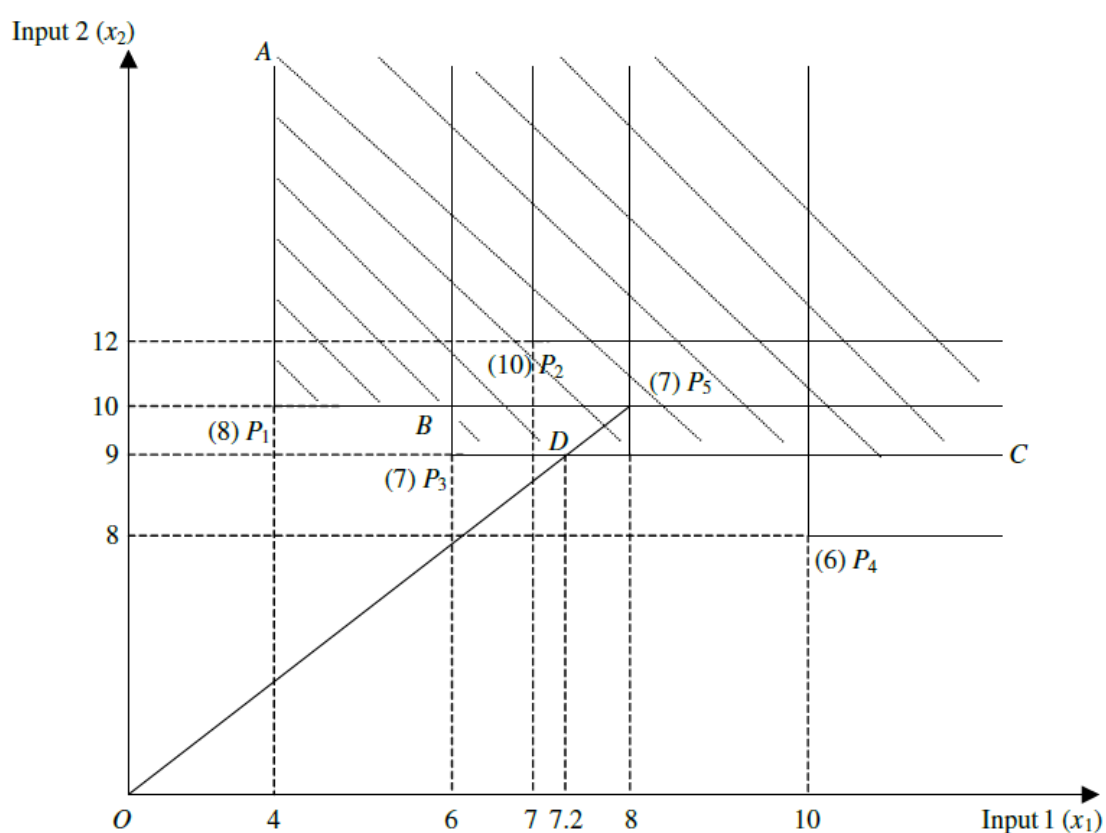
Fonte: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and Data Envelopment Analysis". In "Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research". Cambridge University Press. pp 12-41.

La Figura 3.5 mostra l'*input Free Disposal Hull* per ciascun fascio di *input* dalla Tabella 3.1. Tutti i punti a nord-est di P_1 mostrano fasci di *input* che includono più di 4 unità di *input*₁ e più di 10 unità di *input*₂. Pertanto, esse sono nell'*Input Free Disposal Hull* di P_1 . Un ragionamento analogo vale per i punti verso nord-est degli altri fasci di *input* dalla Tabella 6.1. Ora, prendiamo in considerazione il livello di *output* 7 prodotto dalla ditta #5. Tutte le imprese in questo insieme di

⁹⁶ Esempio tratto da: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and Data Envelopment Analysis". In "Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research". Cambridge University Press. pp 12-41.

dati eccetto la ditta #4 producono 7 o più unità di *output*. Pertanto, tutti questi fasci di *input* tranne P_4 possono produrre $y = 7$. Quindi, tutti i fasci di *input* nell'*Input Free Disposal Hull* di P_1 , P_2 , P_3 e P_5 sono nel *set* di *input* di $y = 7$. Questo produce l'area ombreggiata a destra del AP_1BP_3C come insieme degli ingressi rilevanti.

Figure 3.5 The free disposal *input* hull.



Fonte: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and *Data Envelopment Analysis*". In "*Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research*". Cambridge University Press. pp 12-41.

Ora, supponiamo che cerchiamo l'efficienza radiale orientata agli *input* della società #5. Con riferimento a questo insieme di *input*, la proiezione efficiente è il punto D sul segmento P_3C dell'isoquante con 7,2 unità di $input_1$ e 9 unità di $input_2$. Va sottolineato che il merito principale dell'analisi FDH è che usa sempre

un unico fascio *input-output* osservato come base per il confronto e la valutazione dell'efficienza di qualsiasi impresa.⁹⁷

In questo esempio, il confronto è tra impresa #5 con l'azienda #3. Il fascio di ingresso P_3 richiede solo il 75% di $input_1$ e il 90% di $input_2$ rispetto al fascio P_5 . Sarebbe dimostrabile che è possibile passare a P_3 e produrre ancora $y = 7$. Ciò significherebbe abbassare entrambi gli *input* di almeno il 10%. Infatti, l' $input_1$ può essere ridotto ulteriormente. Ma una misura radiale ignora gli scarti in singoli ingressi. Così, anche una valutazione generosa dell'efficienza tecnica del fascio P_5 è 0.90.

Per ogni fascio di uscita y^0 , possiamo definire il suo *Output Free Disposal Hull*.

$$FDH^0(y^0) = \{y: y \leq y^0\} \quad (3.9)$$

Chiaramente, tutti i fasci all'interno $FDH^0(y^0)$ sono più piccoli rispetto al fascio y^0 in alcuni componenti, ma mai più grandi. Quindi, per ogni fascio di *input* x , se (x, y^0) è fattibile, allora (x, y) è anche fattibile per ogni $y \in FDH^0(y^0)$.

▪ Esempio: due *output*-un *input*

Si consideri il seguente esempio per il caso di due *output*, un *input*.⁹⁸ Supponiamo di osservare i fasci di *input-output* per le cinque imprese indicate nella tabella 3.2.

Nella Figura 6.3, i punti Q_1 verso Q_5 mostrano i fasci di *output* di imprese da #1 a #5. Qualsiasi punto verso il sud-ovest del punto Q_1 rappresenta un fascio di *output* che è nell'*Output Free Disposal Hull* di Q_1 . Un ragionamento analogo

⁹⁷ Esempio tratto da: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and Data Envelopment Analysis". In "Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research". Cambridge University Press. pp 12-41.

⁹⁸ Esempio tratto da: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and Data Envelopment Analysis". In "Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research". Cambridge University Press. pp 12-41.

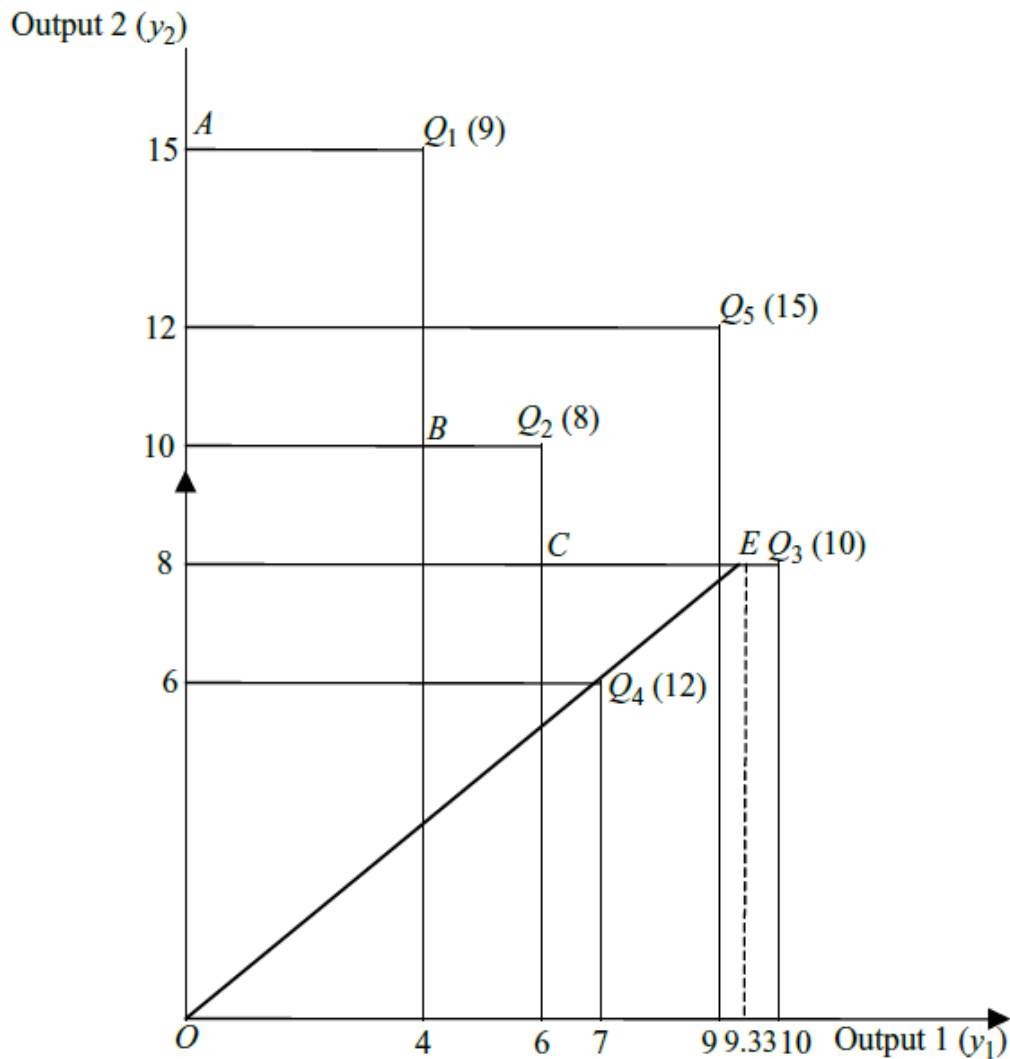
vale per i punti verso il sud-ovest degli altri fasci di uscita dalla Tabella 6.2. Ora, prendiamo in considerazione il livello di *input* 12 utilizzati dalla ditta #4. Tutte le imprese in questo insieme di dati tranne la ditta #5 utilizzano un minor numero di unità di *input*.

Tabella 3.2 Esempio dei dati per un *input*-due *output*

| Impresa | <i>Output</i> ₁ (<i>y</i> ₁) | <i>Output</i> ₂ (<i>y</i> ₂) | <i>Input</i> (<i>x</i>) |
|---------|--|--|---------------------------|
| #1 | 4 | 15 | 9 |
| #2 | 6 | 10 | 8 |
| #3 | 10 | 8 | 10 |
| #4 | 7 | 6 | 12 |
| #5 | 9 | 12 | 15 |

Fonte: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and *Data Envelopment Analysis*". In "*Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research*". Cambridge University Press. pp 12-41.

Pertanto, tutti questi fasci di *output* tranne Q_5 possono essere prodotti da $x = 12$; quindi, tutti i fasci di *output* nell'*Output-Oriented Free Disposal Hull* di Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 e sono nell'insieme di *output* di $x = 12$. Questo rende l'area a sinistra del $AQ_1BQ_2CQ_3D$ come l'insieme di *output* rilevanti. Ora, supponiamo di misurare l'efficienza radiale *output-oriented* della ditta #4 con riferimento a questo insieme di *output*. La proiezione efficiente di Q_4 è il punto E sul segmento CQ_3 dell'isoquante di uscita con 9,33 unità di *output*₁ e 8 unità di *output*₂. Come nel precedente esempio *input-oriented*, anche qui si usa un solo fascio *input-output* effettivamente osservato come base per il confronto e la valutazione dell'efficienza di qualsiasi impresa. In questo esempio *output-oriented*,

Figura 3.6 The free disposal *output* hull.

Fonte: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and *Data Envelopment Analysis*". In "*Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research*". Cambridge University Press. pp 12-41.

osserviamo il confronto delle società #4 è con l'impresa #3. Il fascio di uscita Q_3 produce 113 volte la quantità di $output_1$ e 137 volte la quantità di $output_2$ rispetto al fascio Q_4 . Si potrebbe passare al Q_3 e utilizzare 2 unità meno dell'*input* rispetto alla ditta #4. Ciò aumenterebbe le due uscite di almeno il 33%. L' $output_2$ potrebbe essere esteso ulteriormente. Ma anche quando prendiamo il tasso più basso in cui entrambe le uscite possono essere espanse, la misura FDH *output-oriented* radiale di efficienza tecnica della società di #4 è $3/4$.

3.5 La metodologia FDH

Per prima cosa consideriamo il problema FDH nell'approccio *input-oriented*.

$$\theta^* = \min \theta$$

$$\begin{aligned} \text{Sotto i vincoli } \sum_{j=1}^N \lambda_j x_{ij} &\leq \theta x_{i0} & (i = 1, 2, \dots, n); \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j y_{rj} &\geq y_{r0} & (r = 1, 2, \dots, m); \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j &= 1; \\ \lambda_j &\in \{0, 1\}; & (j = 1, 2, \dots, N); \quad \theta \text{ senza restrizioni.} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Notare che se ad una soluzione ottimale delle analisi del problema, λ_k^* é uguale a 1, allora x^0 risiede nell'*Input Free Disposal Hull* di x^k e, allo stesso tempo, y^0 sta nell'*Output Free Disposal Hull* di y^k .⁹⁹ In altre parole,

$$(x^0, y^0) \in FDH(x^k, y^k).$$

Questo é un problema duale lineare moltiplicativo, perché le variabili di scelta λ_j possono prendere solo i valori 0 o 1 come valori ammissibili. Ma la restrizione che aggiunge λ_j fino all'unità rende il problema molto più facile da risolvere.

Si noti che queste restrizioni implicano che in ogni soluzione (tra cui una soluzione ottimale) solo uno sarà di entità pari l'unità della λ_j e gli altri saranno uguali a 0.

Quindi, possiamo avere al massimo N soluzioni.

⁹⁹ Tulkens, H. (1993). "On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit," *Journal of Productivity Analysis* 4, 183– 210.

Comunque, di queste N soluzioni possibili, non tutte sono fattibili. Per vedere questo, supponiamo di selezionare una soluzione dove λ_k^* sia uguale all'unità e gli altri λ siano tutti uguali a 0.

Perchè questa sia una soluzione ammissibile, y_{rk} deve essere maggiore o uguale a y_{r0} per ogni uscita r . In altri termini, il fascio *output* y^0 deve trovarsi nell'*Output Free Disposal Hull* del fascio y^k . Quindi, se, per ogni impresa j , y_{rj} è minore di y_{r0} per ogni singolo *output* r , allora la ditta j non deve essere considerata come un possibile punto di riferimento per il confronto.

Per valutare qualsiasi fascio *input-output* osservato per l'efficienza tecnica *input-oriented* utilizzando l'analisi FDH, dobbiamo prima eliminare tutte le osservazioni che producono qualsiasi *output* in quantità inferiore alla ditta in fase di valutazione. Chiameremo il *set* restante di osservazioni J^0 . Pertanto,

$$j \in J^0 \Rightarrow y^j \geq y^0. \quad (3.11)$$

Successivamente facciamo un confronto a coppie del fascio in *input* dell'azienda in esame con il fascio di *input* di ciascuna di tali imprese rimanenti. Supponiamo che x^s osservato per azienda s è uno di questi fasci. Poi, per ogni *input* i calcoliamo il rapporto

$$\theta_{is} = \frac{x_{is}}{x_{i0}} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.12)$$

Se $\theta_{is} < 1$ per ogni *input* i poi confrontato con x^0 si può ridurre ogni *input* con il passaggio al fascio x^s . Naturalmente, il fatto che $s \in J^0$ assicura che riducendo gli *input* in questo modo non c'è bisogno di ridurre ogni *output*. In questo confronto a coppie con l'impresa s , troviamo

$$\theta_s^* = \max\{\theta_{1s}, \theta_{2s}, \dots, \theta_{ns}\} \quad (3.13)$$

Dove, θ_s^* indica il fattore per il quale tutti gli *input* potrebbero essere ridimensionati se l'impresa passa dal fascio di *input* x^0 al fascio x^s . Naturalmente, può essere possibile ridurre ulteriormente alcuni *input*. In questo senso, si tratta di una stima conservativa dell'efficienza della azienda produttrice l'*output* y^0 dall'*input* x^0 .

Questa, tuttavia, se è utilizzata l'impresa s come punto di riferimento è una misura dell'efficienza tecnica *input-oriented* dell'impresa da valutare. Si noti che siamo liberi di utilizzare qualsiasi impresa dall'insieme J^0 come punto di riferimento per il confronto.

Naturalmente, selezioniamo quella particolare impresa j per cui θ_j^* è il più basso in tutte le imprese di J^0 .

È possibile che anche questa misura più bassa superi 1. In tal caso, l'efficienza tecnica FDH *input-oriented* della ditta in fase di valutazione è 1.

L'effettiva attuazione di questa procedura per misurare efficienza tecnica *input-oriented* di una società utilizzando l'analisi FDH è costituita dai seguenti passaggi:¹⁰⁰

Fase 1: Eliminare qualsiasi osservazione j se y_{rj} è minore di y_{r0} per qualsiasi uscita r . Chiamare il *set* restante di osservazioni J^0 .

Fase 2: Eliminare qualsiasi osservazione $j \in J^0$ se x_{i0} è inferiore x_{ij} per ogni ingresso i . Chiamare il *set* restante di osservazioni J^1 .

Fase 3: Per ogni osservazione $j \in J^1$, calcolare $\theta_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{i0}}$ per ogni *input* i .

Si noti che, in virtù del punto 2, $\theta_{ij} \leq 1$ per ogni i e j .

¹⁰⁰ Tulkens, H. (1993). "On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit," *Journal of Productivity Analysis* 4, 183–210.

Fase 4: Per ogni $j \in J^1$, definire $\theta_j^* = \max\{\theta_{1j}, \theta_{2j}, \dots, \theta_{nj}\}$

Anche in questo caso, $\theta_j^* \leq 1$ per ogni j .

Fase 5: Definire

$$\theta^* = \min\{\theta_j^* : j \in J^1\}.$$

$$\theta_{FDH}^* = \min\{\theta^*, 1\}.$$

Quindi, consideriamo adesso la misura di efficienza tecnica *output-oriented*. Per questo, abbiamo bisogno di risolvere il seguente problema di programmazione intera mista:

$$\begin{aligned} & \max \phi \\ \text{Sotto i vincoli} \quad & \sum_{j=1}^N \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{r0} \quad (r=1,2,\dots,m); \\ & \sum_{j=1}^N \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad (i=1,2,\dots,n); \\ & \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1; \quad \lambda_j \in \{0,1\}; \quad (j=1,2,\dots,N); \\ & \phi \text{ senza restrizioni} \end{aligned} \tag{3.14}$$

La procedura di soluzione per il modello di *output-oriented* strettamente parallela alla procedura descritta di seguito per il modello *input-oriented* e si compone delle seguenti fasi:

Fase 1: Eliminare qualsiasi osservazione j se y_{rj} è minore di y_{r0} per qualsiasi uscita r . Chiamare il *set* restante di osservazioni J^0 .

Fase 2: Eliminare qualsiasi osservazione $j \in J^0$ se x_{i0} è inferiore x_{ij} per ogni ingresso i . Chiamare il *set* restante di osservazioni J^1 .

Fase 3: Per ogni osservazione $j \in J^1$, calcolare

$$\phi_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{r0}} \text{ per ogni output } r. \tag{3.15}$$

La Fase 2 assicura che $\phi_j \geq 1$ per ogni $j \in J$.

Passo 4: Per ogni $j \in J^1$, definire

$$\phi_j^* = \min \{ \phi_{1j}, \phi_{2j}, \dots, \phi_{mj} \}. \quad (3.16)$$

Si noti che $\phi_j^* \geq 1$ per ogni $j \in J^1$.

Fase 5: Definire

$$\phi_j^* = \max \{ \phi_j^* : j \in J^1 \}. \quad (3.17)$$

$$\phi_{FDH}^* = \max \{ \phi^*, 1 \}. \quad (3.18)$$

La misura di efficienza tecnica FDH orientato al risultato è $\frac{1}{\phi_{FDH}^*}$.

3.6 Additività e replica nell'analisi FDH

Se la tecnologia viene considerata additiva, la somma di due o più fasci di *input* e *output* fattibili è essa stessa fattibile. Quindi, se (x^0, y^0) e (x^1, y^1) sono fasci fattibili, $(x^0 + x^1, y^0 + y^1)$ è un fascio *input-output* fattibile anche'esso. Inoltre, un assunto di base della DEA è che se un'impresa può produrre *output* y^0 da ingresso x^0 , può compiere la stessa produzione qualsiasi altra impresa dello stesso settore.

Cioè, un fascio di *input-output* osservati possono essere replicati qualsiasi numero di volte. Così, additività e replica insieme implicano che, se (x, y) è un fascio fattibile, allora, per ogni intero positivo K , il fascio (Kx, Ky) , è anch'esso fattibile.¹⁰¹ Il Free Replication Hull (FRH) di ogni fascio *input-output* (x^0, y^0) è

$$FRH(x^0, y^0) = \{ (x, y) : x \geq Kx^0; y \leq Ky^0; K \in \{1, 2, 3, \dots\} \}. \quad (3.19)$$

¹⁰¹ Tulkens, H. (1993). "On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit," *Journal of Productivity Analysis* 4, 183–210.

Il FRH è mostrato in Figura 3.7 per il caso singolo *input* –singolo *output*. Si consideri il fascio $x^0 = (x_1^0, x_2^0) = (4, 5)$ mostrato dalla punto A_0 nel diagramma.

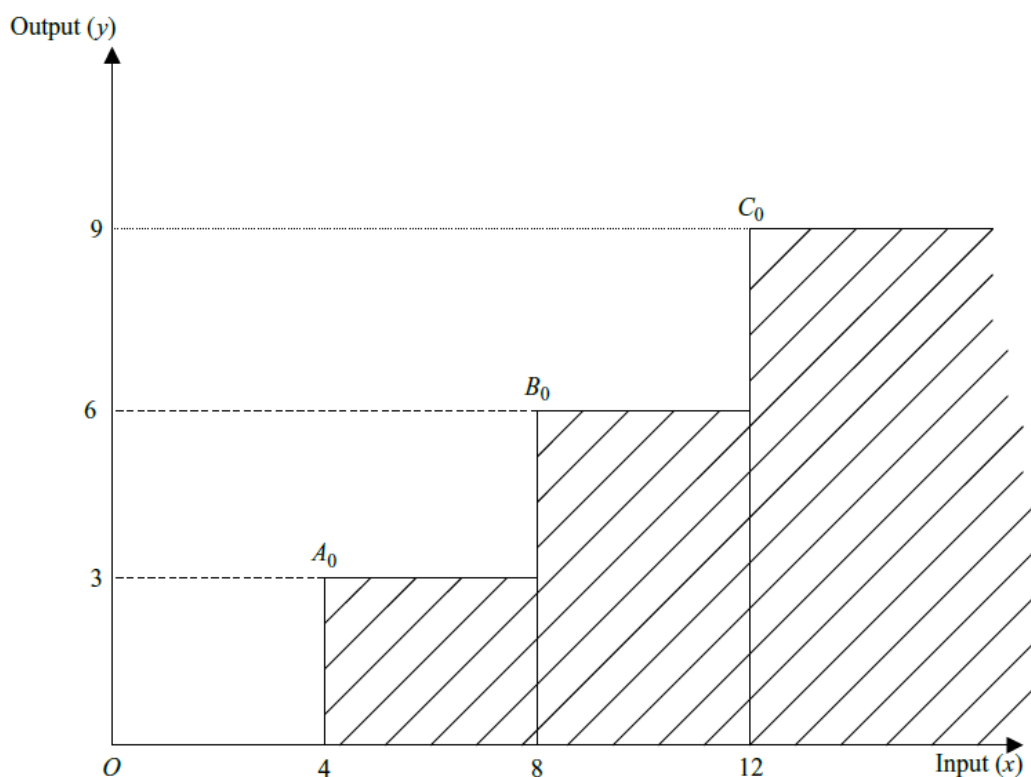
Il punto $B_0 = (8, 10)$ è una replica duplice di A_0 . Analogamente, $C_0 = (12, 15)$ è una replica triplice e così via. L'area ombreggiata a sud-est di ciascuno di questi punti è la corrispondente FDH del punto in questione. L'unione di tutti questi è il FRH di A_0 .

Per un insieme di dati campione di fasci di *input-output* (x^j, y^j) ($j = 1, 2, \dots, N$), il *set* di possibilità di produzione FRH è

$$T_{FRH} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_1^N \lambda_j x^j ; y \leq \sum_1^N \lambda_j y^j ; \right. \\ \left. \lambda_j \in \{1, 2, 3 \dots\}; (j = 1, 2, \dots, N) \right\} \quad (3.20)$$

Chiaramente, $T_{FDH} \subset T_{FRH}$.

Figure 3.7 Il Free Replication Hull.



Fonte: Ray S.C. (2004). “Productivity, Efficiency, and *Data Envelopment Analysis*”. In “*Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research*”. Cambridge University Press. pp 12-41.

La Figura 3.8 mostra l’insieme delle possibilità di produzione FRH insieme al *set* delle possibilità di produzione FDH costruito da quattro fasci di *input-output* osservati:

$$A = (x_A = 4, y_A = 3); B = (x_B = 6, y_B = 4);$$

$$C = (x_C = 11, y_C = 5); D = (x_D = 21, y_D = 9).$$

La frontiera FDH è la linea spezzata di estensione $EAFBGCHD$. Per contro, la frontiera FRH ha estensione $EAFBJA_2KLMA_3NPQA_4RSTU$. Qui, il punto A_2 è una duplice replica di A, L è la somma dei fasci A e B, A_3 è una triplice replica di A e U è un duplice replica di L. Il punto D giace sulla frontiera FDH ed è efficiente rispetto a T_{FDH} . Ma la sua proiezione *output-oriented* efficiente sulla

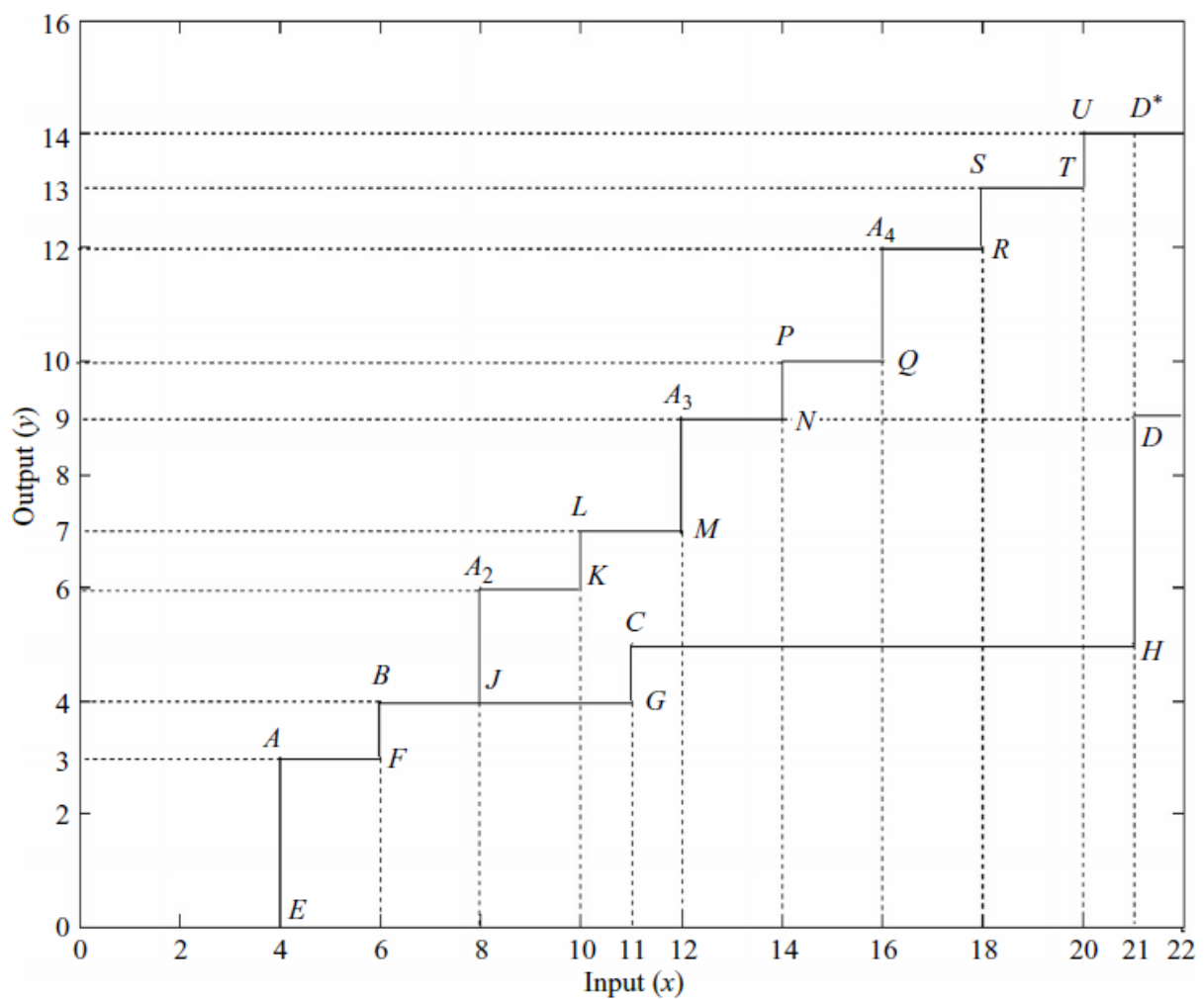
frontiera FRH è il punto D^* , dove 14 unità di *output* sono ottenute da 21 unità di *input*¹⁰². Così,

$$\phi^{\text{FRH}} = 14/9$$

e la corrispondente efficienza *output-oriented* è

$$\text{TE}_{\text{FRH}} = 9/14$$

Figure 3.8 Il *Free Disposal Hull* e il *Free Replication Hull*.



Fonte: Ray S.C. (2004). "Productivity, Efficiency, and *Data Envelopment Analysis*". In "*Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research*". Cambridge University Press. pp 12-41.

¹⁰² Esempio tratto da: Tulkens, H. (1993). "On FDH analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit," *Journal of Productivity Analysis* 4, 183– 210.

Per il caso *multiple-input*, *multiple-output*, l'efficienza tecnica FRH del fascio (x^0, y^0) è l'inverso della soluzione ottima del seguente problema di programmazione mista intera:

$$\begin{array}{ll} \max \phi & \\ \text{Sotto i vincoli} & \sum_{j=1}^N \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{r0} \quad (r=1,2,\dots,m); \\ & \sum_{j=1}^N \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad (i=1,2,\dots,n); \\ & \lambda_j \in \{0, 1, 2, 3 \dots\}; \quad (j=1,2,\dots,N); \\ & \phi \text{ senza restrizioni} \end{array} \quad (3.21)$$

Capitolo 4

Aspetti comuni e confronto

4.1 Introduzione

Come abbiamo osservato singolarmente per entrambi i modelli nelle sezioni precedenti la *Data Envelopment Analysis* (DEA) e il *Free Disposal Hull* (FDH) sono tecniche non parametriche alternative per la costruzione di frontiere di produzione, e per misurare le prestazioni delle unità di produzione rispetto a quelle di frontiera.

In questo capitolo ci occuperemo di due aspetti. In primo luogo analizzeremo un aspetto che accomuna la due metodologie: il trattamento dei dati preliminare alla valutazione di efficienza vera e propria; in secondo luogo andremo a confrontare i due modelli.

Aspetto che sembra irrilevante, ma sul piano pratico è di primaria importanza, è il primo che andremo ad analizzare: il trattamento dei dati, una fase preventiva necessaria per la organizzazione e il completamento dei dati necessari per calcolare la frontiera di produzione.

Per quanto riguarda la seconda fase andremo a confrontare DEA e FDH su diversi criteri, tra cui, le loro implicazioni in termini di struttura della tecnologia di produzione, il loro modo di misurare le *performance* del produttore, il modo in cui trattano gli scarti di *input* e *output*, e sulle considerazioni di calcolo.

4.2 Il trattamento dei dati

DEA e FDH dipendono fortemente dall'insieme dei dati che viene usato come *input* nel modello di produttività. In questo capitolo ci occuperemo di alcuni requisiti relativi ai dati e alle caratteristiche che possono facilitare l'esecuzione dei modelli e l'interpretazione dei risultati.¹⁰³

4.2.1 Selezione di *input* ed *output* e numero delle DMU

Questo rappresenta una delle prime difficoltà nello sviluppare un modello di produttività e nella preparazione dei dati. In questa sede non ci focalizzeremo sul ragionamento manageriale per la selezione dei fattori di *input* ed *output*, ma piuttosto sul calcolo e sugli aspetti dei dati di questo processo di selezione.

Tipicamente, la scelta e il numero di *input* ed *output*, e delle DMU determinano quanta differenza c'è tra unità efficienti e inefficienti. Ci sono due considerazioni contrastanti quando si valuta la dimensione dell'insieme dei dati. Una considerazione consiglia di includere più DMU possibili poiché con una più ampia popolazione vi è una maggiore probabilità di catturare le unità ad alte prestazioni che determineranno la frontiera efficiente e ciò migliorerebbe il potere discriminatorio del modello stesso. L'altra considerazione, conflittuale con l'indicazione di coinvolgere un ampio insieme di dati, è che l'omogeneità dell'insieme dei dati potrebbe diminuire. Riducendo l'omogeneità potrebbero andare ad influire sui risultati alcuni elementi esogeni, di nessun interesse all'analista o fuori dal controllo del manager (*Golany e Roll 1989*).¹⁰⁴ Inoltre, i

¹⁰³ Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

¹⁰⁴ Ci sono metodi da guardare nella loro omogeneità basati su una analisi di pre-elaborazione della distribuzione statistica dei degli insiemi di dati e rimuovere gli " " o raggruppando analisi, e post-elaborare analisi quali I multistrati DEA (Barr, et al., 1994) e ritornare alle analisi in scala per determinare se manca l'omogeneità degli insiemi di dati. Nell'appendice F ci sono raccomandazioni più dettagliate e una discussione sulla valutazione dell'omogeneità l'inclusione di variabili esogene.

requisiti computazionali tenderebbero ad aumentare con insiemi di dati di grandi dimensioni. Esistono già alcune regole del pollice sul numero di *input* ed *output* da selezionare e la loro relazione sul numero di DMU.

Boussofiane e al. (1991) stipulano che per avere un buon potere discriminatorio, in particolare sui modelli DEA, il confine più basso del numero delle DMU dovrebbe essere il multiplo dei numeri di *input* e dei numeri di *output* considerati.¹⁰⁵ Questo ragionamento è derivato dal problema della flessibilità, nella selezione dei pesi da assegnare ai valori di *input* e *output*, nel determinare l'efficienza di ciascuna DMU. Cioè, nel tentativo di essere efficiente una DMU può assegnare tutto il suo peso ad un singolo *input* o *output*. La DMU che ha un rapporto particolare tra un *input* ed un *output* come il più alto (massimo), assegnerà tutto il suo peso a quegli specifici *input* e *output* per apparire efficiente. Il numero di tali possibili DMU è il prodotto del numero degli *input* e degli *output*. Per esempio, se ci sono 3 *input* e 4 *output* il numero totale minimo di DMU dovrebbe essere 12 per qualche potere discriminante di esistere come modello.

Golany e *Roll* (1989) stabilirono la regola del pollice in base alla quale il numero delle unità dovrebbe essere almeno due volte il numero degli *input* e degli *output* considerati.¹⁰⁶ *Bowlin* (1998) ricorda il bisogno di avere tre volte il numero di DMU poiché ci sono *input* ed *output* variabili.¹⁰⁷ *Dyson* e al. (2001) consigliano un totale di due volte il prodotto del numero di *input* ed *output* variabili¹⁰⁸. Per esempio con 3 *input* e 4 *output*, il modello di *Golany* e *Roll* consigliano di usare 14 DMU, mentre *Bowlin* consiglia 21 DMU, e *Dyson* e al. ne consigliano 24. In

¹⁰⁵ Boussofiane, A., Dyson, R.G., and Thanassoulis, E. (1991) Applied Data Envelopment Analysis. European Journal of Operational Research 52, 1-15

¹⁰⁶ Golany, B. and Roll, Y. (1989). "An Application Procedure for DEA". Omega 17, 237-250.

¹⁰⁷ Bowlin, W.F. (1998). "Measuring Performance: An Introduction to Data Envelopment Analysis (DEA)". Journal of Cost Analysis 7, 3-27.

¹⁰⁸ Dyson, R.G., Allen, R., Camanho, A.S., Podinovski, V.V., Sarrico, C.S., and Shale, E.A., (2001) Pitfalls and Protocols in DEA, European Journal of Operational Research, 132, 245-259.

ogni caso, questi numeri potrebbero probabilmente essere usati come minimi per i modelli base di produttività.

Queste regole del pollice tentano di assicurare che i modelli basilari di produttività siano più discriminatori. Se l'analista trova ancora che il potere discriminatorio è perso a causa del ridotto numero di DMU, può persino ridurre il numero dei fattori di *input* ed *output*,¹⁰⁹ oppure l'analista può girare su un diverso modello di produttività che ha più potere discriminatorio.

Modelli di produttività basati su DEA e FDH che possono aiutare a distinguere le DMU più efficacemente, indipendentemente dalla dimensione del *set* dei dati, includono modelli introdotti o sviluppati da *Andersen e Petersen* (1993), *Rousseau e Semple* (1995), e *Doyle e Green* (1994).

4.2.2 Ridurre gli insiemi di dati: *Input/Output* correlati

Con enormi insiemi di dati, alcuni analisti potrebbero desiderare di ridurre la dimensione eliminando i fattori di *input* ed *output* correlati. A mostrare cosa potrebbe accadere in questa situazione, proponiamo un semplice esempio di dati illustrati è presentato nella Tavola 4.1. In questo esempio, abbiamo 20 DMU, 3 *input* e 2 *output*. Il primo ingresso è perfettamente correlato al secondo. Il secondo ingresso è calcolato aggiungendo 2 al primo ingresso per ciascuna DMU. Le uscite sono numeri generati a caso.¹¹⁰

Il modello CCR base è eseguito per il caso di 3 *input* (dove i primi due *input* sono correlati) e il caso di 2 *input* dove l'*input*₂ è rimosso dalle analisi.

¹⁰⁹ Entrate che sono altamente correlate con altre o uscite che correlano altamente con altre possono essere eliminate attraverso un'analisi di correlazione.

¹¹⁰ Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Tabella 4.1: Punteggi di efficienza dai Modelli con *Input* Correlati

| DMU | <i>Input</i> 1 | <i>Input</i> 2 | <i>Input</i> 3 | <i>Output</i> 1 | <i>Output</i> 2 | Punteggio Efficienza (3 I, 2 O) | Punteggio Efficienza (2 I, 2 O) |
|-----|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 10 | 12 | 7 | 34 | 7 | 1.000 | 1.000 |
| 2 | 24 | 26 | 5 | 6 | 1 | 0.169 | 0.169 |
| 3 | 23 | 25 | 3 | 24 | 10 | 1.000 | 1.000 |
| 4 | 12 | 14 | 4 | 2 | 5 | 0.581 | 0.576 |
| 5 | 11 | 13 | 5 | 29 | 8 | 0.954 | 0.948 |
| 6 | 12 | 14 | 2 | 7 | 2 | 0.467 | 0.460 |
| 7 | 44 | 46 | 5 | 39 | 4 | 0.975 | 0.975 |
| 8 | 12 | 14 | 7 | 6 | 4 | 0.400 | 0.400 |
| 9 | 33 | 35 | 5 | 2 | 10 | 0.664 | 0.664 |
| 10 | 22 | 24 | 4 | 7 | 6 | 0.541 | 0.541 |
| 11 | 35 | 37 | 7 | 1 | 4 | 0.220 | 0.220 |
| 12 | 21 | 23 | 5 | 0 | 6 | 0.493 | 0.493 |
| 13 | 22 | 24 | 6 | 10 | 6 | 0.437 | 0.437 |
| 14 | 24 | 26 | 8 | 20 | 9 | 0.534 | 0.534 |
| 15 | 12 | 14 | 9 | 5 | 4 | 0.400 | 0.400 |
| 16 | 33 | 35 | 2 | 7 | 6 | 0.900 | 0.900 |
| 17 | 22 | 24 | 9 | 2 | 3 | 0.175 | 0.175 |
| 18 | 12 | 14 | 5 | 32 | 10 | 1.000 | 1.000 |
| 19 | 42 | 44 | 7 | 9 | 7 | 0.352 | 0.352 |
| 20 | 12 | 14 | 4 | 5 | 3 | 0.349 | 0.346 |

Fonte: Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

I punteggi di efficienza sono nelle ultime due colonne. Nota bene che in questo caso, i punteggi di efficienza sono quasi perfettamente correlati.¹¹¹ Le uniche differenze che esistono sono nelle DMU 4, 5, 6, e 20 (per tre posti decimali).

Questo può risparmiare un po' di tempo nell'acquisizione dei dati, immagazzinamento, e calcolo, ma persino quando un fattore perfettamente correlato è incluso potrebbe dare una risposta leggermente diversa.

Cosa accade ai risultati potrebbe dipendere dal livello di correlazione che è accettabile e laddove l'esatta efficienza dei punteggi sono importanti.

4.2.3 Squilibrio nell'ampiezza dei Dati

Uno dei modi migliori per far sì che non ci sia troppo squilibrio negli insiemi dei dati è averli allo stessa o simile grandezza. Un modo per far sì che i dati siano della stessa o di una simile grandezza e all'interno degli insiemi è quello di *normalizzare i dati*. Il processo di normalizzazione è ottenuto in due semplici passi. Il primo passo è trovare la media del *set* di dati per ogni *input* e *output*. Il secondo passo è quello di dividere ogni *input* o *output* specifico per il valore medio.¹¹²

Per esempio, guardiamo un piccolo insieme di 10 dati casuali (10 DMU) con 2 *input* e 2 *output* come mostrato nella Tabella 2. Le grandezze comprese tra 10^0 e 10^6 ; in molti casi questa situazione può essere anche più estrema.¹¹³ Presumiamo che la Tabella 4.2 sia un insieme di dati in fila per il problema e debba essere applicato un modello di rendimenti di scala costanti *output-oriented* (CCR).

¹¹¹ Un semplice metodo per determinare la correlazione è valutare la correlazione dei dati in un pacchetto statistic o persino su un foglio di calcolo elettronico con funzioni di correlazione.

¹¹² Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

¹¹³ Per esempio, se le vendite totali di una compagnia maggiore (di solito un bilione di dollari) fosse stata comparata al rischio associato con quella compagnia (di solito un punteggio BETA di approssimazione 1).

Una delle difficoltà incontrate da alcuni software di programmazione matematica che possono essere utilizzati per eseguire i modelli DEA e FDH (ad esempio Lingo) è che ci possono essere problemi di "scala". Questo squilibrio può causare problemi nell'esecuzione dell'applicazione e potrebbero presentarsi errori di arrotondamento. La normalizzazione permetterà di affrontare questo problema.

Tabella 4.2: Insieme di Dati per l'esempio di Normalizzazione.

| DMU | <i>Input 1</i> | <i>Input 2</i> | <i>Output 1</i> | <i>Output 2</i> |
|---------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | 1733896 | 97 | 1147 | 0.82 |
| 2 | 2433965 | 68 | 2325 | 0.45 |
| 3 | 30546 | 50 | 1998 | 0.23 |
| 4 | 1052151 | 42 | 542 | 0.34 |
| 5 | 4233031 | 15 | 1590 | 0.67 |
| 6 | 3652401 | 50 | 1203 | 0.39 |
| 7 | 1288406 | 65 | 1786 | 1.18 |
| 8 | 4489741 | 43 | 1639 | 1.28 |
| 9 | 4800884 | 90 | 2487 | 0.77 |
| 10 | 536165 | 19 | 340 | 0.57 |
| Media Colonna | 2425119 | 53.9 | 1505.7 | 0.67 |

Fonte: Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Nella Tabella 4.2, i valori medi di colonna sono dati nella fila finale. La media è determinata dalla semplice equazione media (4.1) che riassume il valore di ogni *input* o *output* delle DMU in tale colonna e quindi divide la somma per il numero di DMU.

$$\bar{V}_i = \frac{\sum_{n=1}^N V_{ni}}{N} \quad (4.1)$$

dove \bar{V}_i é il valore medio per colonna i (un *input* o un *output*), N é il numero di DMU e V_{ni} è il valore della DMU_n per un *input* o un *output* dati i . Nella Tabella 4.2,

$$\bar{V}_1 = 2425119; \bar{V}_2 = 53,9; \bar{V}_3 = 1505,7; \bar{V}_4 = 0,67.$$

Il secondo passo è quello di dividere tutti i valori di una colonna da questa ultima fila di valori medi. L'equazione generale per ogni cella di Tabella 4.3 é:

$$VNorm_{ni} = \frac{V_{ni}}{\bar{V}_i} \quad (4.2)$$

dove $VNorm_{ni}$ é il valore normalizzato per il valore associato alla DMU_n e *input* o *output* nella colonna i .

La Tabella 4.3 mostra l'insieme dei dati normalizzati a quattro cifre decimali.

Come si può vedere nell'ultima riga della tabella 3, la media per ogni colonna di dati normalizzati è 1. L'ultima colonna della tabella 3 contiene il rispettivo punteggio di efficienza per ciascuna DMU utilizzando il modello di base CCR. Questi punteggi di efficienza sono gli stessi risultati dei punteggi di efficienza risultanti nella Tabella 4.2.¹¹⁴

¹¹⁴ Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Tabella 4.3: Dati medio-normalizzati per l'empio di Normalizzazione

| DMU | <i>Input 1</i> | <i>Input 2</i> | <i>Output 1</i> | <i>Output 2</i> | CCR |
|---------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-------|
| 1 | 0.7150 | 1.7996 | 0.7618 | 1.2239 | 0.432 |
| 2 | 1.0036 | 1.2616 | 1.5441 | 0.6716 | 0.709 |
| 3 | 0.0126 | 0.9276 | 1.3270 | 0.3433 | 1.000 |
| 4 | 0.4339 | 0.7792 | 0.3600 | 0.5075 | 0.419 |
| 5 | 1.7455 | 0.2783 | 1.0560 | 1.0000 | 1.000 |
| 6 | 1.5061 | 0.9276 | 0.7990 | 0.5821 | 0.448 |
| 7 | 0.5313 | 1.2059 | 1.1862 | 1.7612 | 0.952 |
| 8 | 1.8513 | 0.7978 | 1.0885 | 1.9104 | 0.865 |
| 9 | 1.9796 | 1.6698 | 1.6517 | 1.1493 | 0.570 |
| 10 | 0.2211 | 0.3525 | 0.2258 | 0.8507 | 1.000 |
| Media Colonna | 1 | 1 | 1 | 1 | |

Fonte: Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

4.2.4 Numeri Negativi e Valori Zero

Molte volte l'insieme dei dati avrà numeri negativi. I modelli base DEA e FDH non sono capaci di completare un'analisi con numeri negativi; quindi: tutti i numeri devono essere non negativi e preferibilmente positivi (senza valori zero). Questo è stato definito come il requisito di "semipositività" di DEA e FDH. *Charnes* e al. (1991) prevedono un modello per alleggerire questo requisito, ma noi non ci focalizzeremo su questo.

Uno dei più comuni metodi per eliminare il problema della presenza di valori non positivi in DEA e FDH (per modelli di rapporto) è ottenuto attraverso l'aggiunta di una costante largamente positiva ai valori degli *input* o degli *output* che hanno numeri non positivi. E in alcuni casi è stato consigliato (*Bowlin* 1998) per rendere i numeri negativi o pari a zero di un numero inferiore di grandezza

rispetto agli altri numeri nel *set* di dati. Questo permetterebbe di superare alcune delle difficoltà di questa limitazione, ma i risultati potrebbero ancora cambiare a seconda della scala utilizzata dai modelli (regolazione a valore costante). Questo problema è stato definito come una “traduzione variante”. È stato trovato che alcuni modelli di rapporti basati su DEA e FDH sono traduzioni invarianti, per esempio, il modello BBC in DEA,¹¹⁵ ma sono persino limitati a quali valori possono essere scalati o tradotti.¹¹⁶

Prima di affrontare alcune delle soluzioni, investighiamo ora uno scenario per i fornitori di polizze assicurative che hanno deciso di investire in una serie di *Information Technology* (IT). Questo esempio può mostrarci una serie di difficoltà nella preparazione dei dati. Consideriamo che ci sono 8 nuovi sistemi di IT in atto in vari reparti di una determinata società di assicurazione. Gli unici dati conferiti a un analista sono il risparmio sui costi di manodopera, la riduzione dei costi operativi, la diminuzione delle polizze sbagliate, e la diminuzione del tempo per completare una polizza. L’analista ha deciso che i risparmi di costo verranno usati per determinare i costi operazionali e di lavoro e serviranno come *input* nel modello di produttività, mentre gli *output* saranno rappresentati nel miglioramento dell’accuratezza della polizza e nel tempo per elaborare le pratiche. In alcuni casi ci sono risultati migliorati (es: elaborare una diminuzione di errori con valori positivi) e in alcuni casi ci sono risultati di esecuzione peggiori (es: elaborare un aumento di errori e avere valori negativi). Quindi, i dati hanno bisogno di essere “adattati” (vedi Tabella 4.4).

Uno dei primi passi in questo processo di adattamento è eliminare ogni zero o valore negativo nell’insieme dei dati. Un altro problema è di costruire i dati in modo tale che gli *input* abbiano la caratteristica di avere valori più piccoli come migliori (meno *input* richiesti per un *output* dato), e gli *output* con una

¹¹⁵ Vedi Ali, A.I. and Seiford, L.M. (1990). “Translation Invariance in Data Envelopment Analysis”. *Operations Research Letters* 9, 403–405.

¹¹⁶ Sarkis J. (2002) “Preparing your data for DEA”. In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

caratteristica di avere valori più grandi come migliori. In questa situazione abbiamo due aggiustamenti che hanno bisogno di essere completati prima dell'esecuzione del modello e tali che i risultati abbiano senso manageriale.

Tabella 4.4: Insieme di dati grezzi per i sistemi di Informazione Tecnologica

| DMU | <i>Input</i> | | <i>Output</i> | |
|-----|------------------------------------|---|--|---|
| | Risparmio Costi Lavoro (000) | Risparmi Costi Operazionali (000) | Diminuzione di Errori Processi (numero di polizze) | Diminuzione del tempo di Completazione (minuti per polizza) |
| IT1 | 240 | 128 | 2 | 0 |
| IT2 | -325 | 1006 | 0 | 59 |
| IT3 | -1400 | 1017 | 27 | 26 |
| IT4 | -363 | 500 | 0 | 75 |
| IT5 | -55 | 256 | 77 | 66 |
| IT6 | 4450 | -246 | 12 | -14 |
| IT7 | 6520 | 79 | -3 | -14 |
| IT8 | 3900 | 341 | 20 | 23 |

Fonte: Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Per mostrare la variazione nei nostri risultati e il problema della traduzione nei modelli (almeno il modello base CCR), illustreremo due esempi di traduzione selettiva costante a casi in cui esistono numeri negativi e gli *input* sono migliori quando abbiano un valore più piccolo e gli *output* sono migliori quando abbiano un valore più grande. Come *input*, useremo il lavoro e i costi operativi. Per convertire i "risparmi" nei dati originali nel costo lavoro e le stime dei costi operativi, selezioneremo un numero grande, 10,000 (in migliaia), e sottraiamo ogni numero delle prime due colonne da questo valore.

Arriviamo all'insieme dati nella seconda e terza colonna nella Tabella 4.5 definite da Costo del Lavoro e Costo Operazionale per gli *input*. Notiamo che adesso abbiamo tutti i valori positivi per gli *input*. Dal momento che è meglio avere costi più piccoli che più grandi possiamo osservare, ad esempio, che IT1 funziona meglio sul costo del lavoro (meno valore di costo) di IT2, ma IT2 funziona meglio nei costi operativi. Questa è una situazione simile a quella nella precedente Tabella 4.4 dove IT1 era meglio nei risparmi sul costo del lavoro di IT2 (con valori di risparmio più alti), e IT2 era meglio nel risparmio sui costi operativi¹¹⁷.

Tabella 4.5: Insieme di dati in Scala1

| DMU | <i>Input</i> | | <i>Output</i> | | |
|-----|--------------|-----------------|--|--|--|
| | Costi Lavoro | Costi Operativi | Procedimento Diminuzione Errori (numero di polizze) | Diminuzione di tempo (minuti per polizza) | Punteggio Efficienza Tecnica CCR |
| IT1 | 9760 | 9872 | 12 | 20 | 0.232 |
| IT2 | 10325 | 8994 | 10 | 79 | 0.881 |
| IT3 | 11400 | 8983 | 37 | 46 | 0.564 |
| IT4 | 10363 | 9500 | 10 | 95 | 1.000 |
| IT5 | 10055 | 9744 | 87 | 86 | 1.000 |
| IT6 | 5550 | 10246 | 22 | 6 | 0.458 |
| IT7 | 3480 | 9921 | 7 | 6 | 0.232 |
| IT8 | 6100 | 9659 | 30 | 43 | 0.805 |

Fonte: Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In Productivity Analysis in the Service Sector with *Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

¹¹⁷ Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Per le uscite abbiamo visto aumentare la diminuzioni degli errori e aumentare le diminuzioni di tempo per completare la polizza, quindi aggiungiamo un valore di 20 ad ognuno. Questa traduzione elimina ogni zero o valore negativo mentre ancora consideriamo migliori i valori più grandi. Eseguendo il modello CCR otteniamo IT4 e IT5 come unità efficienti, seguite da IT2 con il punteggio più alto tra le unità inefficienti.

Vediamo ora di cambiare le costanti di traduzione separatamente per ciascun fattore *input* ed in *output*. Nel prossimo esempio, i valori sono ancora arbitrariamente scelti, ma variano per ogni *input* ed *output*. Abbiamo scelto numeri che erano circa di 500 al di sopra dei valori massimi per ciascuno dei valori di uscita.

Cioè, per la colonna risparmio sul costo del lavoro della Tabella 4.4 abbiamo sottratto tutti i valori dal 7000, e per i risparmi sui costi operativi abbiamo sottratto tutti i valori dal 1500. Per gli *output* abbiamo aggiunto abbastanza unità per renderli positivi. Quindi abbiamo aggiunto i valori di 4 e 15 per ogni valore della diminuzione di errore di elaborazione e risparmio nei tempi di consegna, rispettivamente, per arrivare ai valori che compaiono nelle colonne di *output* della Tabella 4.6.

Questa volta, quando eseguiamo i modelli base, vediamo che ci sono unità più efficienti e che alcune hanno aumentato la loro efficienza (es: IT2), mentre altre sono diminuite (es: IT1). Questa è la maggiore difficoltà incontrata quando c'è una scala di traduzione dei risultati. Ora il problema è come affrontare questa situazione.

Tabella 4.6: Insieme dei Dati in Scala2

| DMU | <i>Input</i> | | <i>Output</i> | | |
|-----|--------------|-----------------|--|--|--|
| | Costo Lavoro | Costi Operativi | Procedimento Diminuzione Errori (numero di polizze) | Diminuzione di tempo (minuti per polizza) | Punteggio Efficienza Tecnica CCR |
| IT1 | 6760 | 1372 | 6 | 15 | 0.184 |
| IT2 | 7325 | 494 | 4 | 74 | 1.000 |
| IT3 | 8400 | 483 | 31 | 41 | 1.000 |
| IT4 | 7363 | 1000 | 4 | 90 | 1.000 |
| IT5 | 7055 | 1244 | 81 | 81 | 1.000 |
| IT6 | 2550 | 1746 | 16 | 1 | 0.546 |
| IT7 | 480 | 1421 | 1 | 1 | 0.181 |
| IT8 | 3100 | 1159 | 24 | 38 | 1.000 |

Fonte: Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In Productivity Analysis in the Service Sector with *Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Possono essere seguiti alcuni passi per assicurare che gli errori di scalatura o di traduzione non impattino sui risultati finali di questa analisi. In primo luogo, invece di usare numeri scelti arbitrariamente, dovrebbe essere fatto ogni tentativo per acquisire e applicare i valori reali della specifica linea di base. Questo potrebbe significare la necessità di andare alla ricerca ad ulteriori dati grezzi e dati dei periodi precedenti.

I dati originali indicati nella Tabella 4.4 si basano su un problema del mondo reale, dove erano conosciute dalle linee di base reali per ciascun fattore di *input* e *output*. I valori dentro ad ogni colonna sono stati ottenuti dalla loro rispettiva linea di base. Questi risultati forniscono caratteristiche appropriate per gli *input*, ma gli *output* hanno ancora bisogno di avere valori più grandi come preferibili. Queste colonne sono state bilanciate prendendo l'inverso dei loro valori attuali, quindi mantenendo l'integrità delle relazioni dei dati.

Tabella 4.7: Insieme dei Dati in Scala 3

| DMU | <i>Input</i> | | <i>Output</i> | | |
|-----|--------------|-----------------|--|--|--|
| | Costo Lavoro | Costi Operativi | Procedimento Diminuzione Errori (numero di polizze) | Diminuzione di tempo (minuti per polizza) | Punteggio Efficienza Tecnica CCR |
| IT1 | 7260 | 4372 | 3.597 | 0.7143 | 0.833 |
| IT2 | 7825 | 3494 | 3.571 | 0.7457 | 1.000 |
| IT3 | 8900 | 3483 | 3.953 | 0.7278 | 1.000 |
| IT4 | 7863 | 4000 | 3.571 | 0.7547 | 0.915 |
| IT5 | 7555 | 4244 | 4.926 | 0.7496 | 1.000 |
| IT6 | 3050 | 4746 | 3.731 | 0.7072 | 0.887 |
| IT7 | 980 | 4421 | 3.534 | 0.7072 | 1.000 |
| IT8 | 3600 | 4159 | 3.846 | 0.7262 | 1.000 |

Fonte: Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Come vediamo nella Tabella 4.7 questi nuovi valori contengono le caratteristiche necessarie per completare l'analisi. C'è inoltre un avvertimento nel prendere l'inverso dei dati come traduzione: questa traduzione può causare una variazione nei punteggi di efficienza (Lewis e Sexton 2000)¹¹⁸. Così, la soggettività gestionale e le preferenze entrano in gioco ancora una volta, a seconda di come i gestori desiderano visualizzare e interpretare i valori di *input* e *output*¹¹⁹.

¹¹⁸ Un output che ha grandi numeri come non preferibili è stato definito come "output indesiderabile" (Yaisawarng e Klein 1994) e "anti-isotonico" (Sheel, 2001), ed è stato raccomandato di utilizzare l'inverso di questi valori nell'analisi. Un esempio di questo tipo di produzione è l'inquinamento. Un altro modo per ottenere un risultato simile di regolazione per gli output indesiderati è quello di rendere questo valore in output un valore di input, ma questo non garantisce lo stesso punteggio di efficienza come utilizzare l'inverso della produzione e lasciandola al numeratore.

¹¹⁹ Sarkis J. (2002) "Preparing your data for DEA". In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Un altro modo per tradurre i dati ed evitare errori di scalatura é includere esplicitamente la prestazione prima e dopo. Così, invece di sottrarre i dati da periodo a periodo, o gli aggiustamenti con le inverse, il metodo più puro potrebbe essere quello di usare le prestazioni del periodo precedente come *input* e le prestazioni di questo periodo come *output* per quelle misure dove valori più grandi sono migliori, e l'opposto per quelle misure dove i valori più piccoli sono i migliori. Questo richiederà fattori aggiuntivi di *input* ed *output* che dovranno essere inclusi (il doppio del numero di *input* ed *output*) e possono danneggiare il potere discriminatorio di alcuni modelli di produttività se non esistono abbastanza DMU.

Un altro rimedio ancora per assicurarsi che la traduzione varianza non abbia impatto sulla soluzione è usare un tipo di modello differente tra i vari modelli DEA e FDH. Ad esempio, *Ali e Seiford* (1990) e *Pastor* (1996) hanno mostrato che uno spostamento non altera la frontiera efficiente di certe formulazioni DEA (in particolare, il modello additivo per entrambi gli *input* e gli *output* e il modello BCC per gli *output*) e quindi questi approcci sono traduzioni invarianti. Così, le costanti di valore assoluto possono essere aggiunte a qualsiasi *input* e *output* nel modello additivo, ed a qualsiasi *output* nel modello BCC per risolvere il problema dei valori negativi o zero. Similarmente a quello che abbiamo mostrato nel nostro esempio, la stessa regolazione deve essere fatta per i valori di *input* o *output* per tutte le DMU incluse nel *set* di dati al fine di non alterare la frontiera di efficienza.

Bowlin (1998) parla di sostituzione di un valore molto piccolo positivo con il valore negativo se la variabile è un *output*. Egli suggerisce questo approccio perché la caratteristica dei modelli DEA e FDH è che cercano di mettere ogni DMU nella miglior luce possibile e, quindi, sottolineano (danno peso massimo) a quelle uscite su cui la DMU ha una migliore performance. Quindi, *Bowlin* sostiene, un *output* variabile con un valore molto piccolo non dovrebbe aspettarsi di contribuire ad un alto punteggio, il quale sarebbe vero per un valore negativo.

Quindi, questo tipo di traduzione non dovrebbe generalmente influenzare l'efficienza del punteggio. Certamente ciò significa che questo valore non deve essere più grande di ogni altro valore di *output* nell'insieme dei dati.

4.2.5 Dati Mancanti

Nel valutare le DMU e nel tentativo di ottenere i dati di *input* e *output* necessari, l'analista si imbatte in situazioni in cui mancano dati. L'alternativa abituale è quella di eliminare ogni DMU per cui mancano i dati per ogni *input* ed *output*. Chiaramente, quando eliminando le DMU dalla valutazione si crea il problema se la vera frontiera efficiente venga sviluppata o meno. I rimedi per i dati mancanti sono ancora abbastanza limitati. In tutte le situazioni presentate dai ricercatori di questi modelli, è ancora relativamente soggettivo l'approccio nel riempire un buco da un dato mancante.¹²⁰

Un approccio, dalla percezione manageriale, è ottenere “una migliore stima” dai manager considerando valori che essi credono sarebbero i valori per i dati mancanti. Questo è un semplice modo per compiere questo compito, ma è molto soggettivo. Per tentare di avvicinarsi ad un valore realistico si suggerisce di chiedere più valori: ottimisti, pessimistici e valori probabili ed eseguire i modelli basati su tali valori per vedere come sarebbe sensibile la soluzione per queste classifiche soggettive. In questa situazione potrebbe essere determinato un valore atteso.

Nei progetti di gestione quando si stima il tempo di completamento di un progetto, viene usata una distribuzione beta (vedi più avanti) per giungere ad un valore atteso usando valori ottimistici, più probabili, e pessimistici. Un metodo per arrivare ad un valore atteso è quello di applicare i valori soggettivi del

¹²⁰Sarkis J. (2002) “Preparing your data for DEA”. In Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis, 2 nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

manager in un calcolo del valore atteso in base a questa distribuzione di probabilità.

Ad esempio, si supponga che un dato mancante sia la quantità di tempo impiegato per elaborare una polizza assicurativa in un reparto di sottoscrizione di assicurazioni. Ad un gruppo di manager può essere chiesto di definire la stima ottimistica del tempo di completamento, un momento più probabile, e un tempo pessimista. Il calcolo del valore atteso tramite la distribuzione *beta* è definito come:

$$V_e = \frac{V_o + 4V_m + V_p}{6} \quad (4.3)$$

dove V_e è il valore stimato (atteso), V_o è il valore ottimistico, V_m è il valore più probabile e V_p è il valore pessimistico.

Chiaramente, questo comporta una certa serie di ipotesi, in primo luogo, che la distribuzione beta rappresenti davvero la struttura dei dati, e che i gestori siano in grado di fornire stime. Un approccio alternativo è di esaminare i dati attraverso le DMU, determinare quale sia la struttura esistente e usare i modelli di calcolo basati su quella struttura. In questa situazione, il valore ottimistico sarebbe il valore migliore tra i fattori di *input* ed *output* dati, il pessimistico sarebbe il valore peggiore e la media sarebbe il valore più probabile. Ancora, in questa situazione non si possono ignorare i valori degli altri *input* ed *output*. Un altro problema che sorge è che il punto dei dati mancanti potrebbe essere il punto migliore per quella DMU e questo potrebbe avere un impatto forte sul punteggio di efficienza. In questo caso, saranno richieste le variazioni nei dati e analisi.

Recentemente, altri hanno proposto approcci alternativi basati su tecniche più complesse, per determinare i valori mancanti. Un'altra tecnica è quella che fa riferimento a un approccio Matematico Confuso per arrivare ad stimare il valore

dei dati mancanti.¹²¹ Questa tecnica richiede uno sforzo significativo per arrivare a valori possibili che potrebbero essere usati ed è ancora dipendente su una serie di variazioni di valori per determinare la sensibilità relativa delle soluzioni.

4.3 Il Confronto

Come abbiamo visto singolarmente per ogni modello, DEA e FDH, condividono un obiettivo in comune: la valutazione della prestazione del produttore, tipicamente in termini di efficienza tecnica, in particolare quando i produttori impiegano diversi *input* per produrre molti *output* e quando i prezzi non sono disponibili o sono inaffidabili.

In queste circostanze non è possibile calcolare un rapporto *output-input*, come potrebbe essere possibile nel caso di singolo *input* o *output*.

Inoltre in assenza dei prezzi non è possibile costruire un rapporto di indice di (valore degli) *output* a un indice di (valore degli) *input*, proprio come un indice di produttività *Tornqvist* (1936). Di conseguenza, DEA e FDH seguono *Farrell* (1957), misurando la prestazione del produttore in termini di indici di efficienza tecnica, questi indici, essendo adattamenti di funzioni di distanza introdotti da *Debreu* (1951) e *Shepard* (1953), rappresentano la tecnologia di produzione nel caso di multiplo *input*-multiplo *output*.¹²²

DEA e FDH condividono una struttura di programmazione matematica. DEA è formulata come una serie lineare di problemi primali e duali, mentre FDH è formulato come una serie di problemi primali a variabile intera mista e una serie di problemi duali lineari. Di conseguenza FDH è più semplice da risolvere, e una

¹²¹ Vedi Kao, C. and Liu, S.T. (2000) Data Envelopment Analysis with Missing Data: An Application to University Libraries in Taiwan. *Journal of the Operational Research Society* 51, 897-905.

¹²² Un tempo Wolfgang Eichhorn scrisse sulla misura dell'efficienza produttiva, cercando di incorporare il tempo in un modello parametrico. Vedere Eichhorn (1971-72, 1978a, 1978b).

parte di FDH viene spesso utilizzata come primo passo della partizione dati per alleviare l'onere computazionale necessario per risolvere i problemi DEA. Come illustrato inizialmente, DEA e FDH sono entrambi modelli non stocastici, il che ha allentato la loro accettazione in economia, sebbene non nella gestione della scienza. Attualmente, comunque, si sta compiendo uno sforzo per cercare di aggiungere un elemento stocastico alle due tecniche che permetterebbe loro di sistemare le risorse tipiche della confusione statistica comunemente trovata nei dati economici.¹²³

In questo capitolo ci occuperemo di confrontare DEA e FDH sulle basi di quattro criteri. Il primo è la struttura della tecnologia di produzione creata dai dati di *input* e *output* dalle due tecniche.¹²⁴

Per la struttura della tecnologia intendiamo principalmente le proprietà di convessità e monotonia, ma esploriamo inoltre le economie di scala e i tassi di sostituzione e trasformazione implicita dalle variabili duali nei problemi di programmazione.

Il secondo criterio riguarda il modo in cui le due tecniche misurano le performance del produttore. Qui siamo interessati in particolare alle relazioni di dominio, con misure di efficienza radiale, e con il modo in cui le due tecniche selezionano i produttori non dominati per servire come modelli di ruolo per produttori dominati. Il terzo criterio è strettamente connesso al secondo, essendo interessato a curare gli scarti in *input* e in *output* che potrebbero rimanere dopo che l'efficienza radiale viene calcolata.

¹²³ Per i tentativi di impiegare le tecniche di programmazione matematica "chance-constrained" come mezzo per introdurre un elemento stocastico in DEA, vedere la Land, Lovell e Thore (1992), che forniscono anche ulteriori riferimenti. Un approccio alternativo è quello dei punteggi di efficienza radiali tramite tecnica di bootstrap generati da DEA o FDH. Per un'applicazione di bootstrap per FDH, vedere la Simar (1992).

¹²⁴ Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckaut (1993). Frontier Tales: DEA and FDH, in W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. Mathematical Modelling in Economics. Berlin: Physica-Verlag.

Il criterio finale, accennato sopra, riguarda la complessità del calcolo delle due tecniche.

4.3.1 Formulazione di DEA e FDH

Posto che i produttori $i = 1, \dots, I$, utilizzino *input* $x^{iT} = (x_1^i, \dots, x_n^i) \in R_+^n$ per produrre gli *output* $y^{iT} = (y_1^i, \dots, y_m^i) \in R_+^m$. I vettori x^i e y^i formano, rispettivamente, le colonne i -esime delle matrici di dati X e Y . Posto che $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_I) \in R_+^I$ sia un vettore di intensità che forma combinazioni lineari non negative dei produttori I . Alla fine, lascia $e^T = (1, \dots, 1)$ essere un vettore opportunamente dimensionato di uno.

Un problema di misurazione di efficienza *output-oriented*¹²⁵ può essere scritto come una serie di problemi di programmazione lineare I , uno per ciascun produttore, come

$$\begin{aligned} & \max_{\theta, \lambda} \theta \\ \text{Sotto i vincoli} \quad & \theta y^i - Y\lambda \leq 0 \\ & X\lambda - x^i \leq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Questi problemi cercano la massima quantità al quale ciascun produttore può espandere il suo vettore di *output*, dato il suo vettore di *input*, e ancora non ecceda la pratica migliore osservata determinata da una combinazione lineare di tutti i produttori I .¹²⁶ Le soluzioni di questi problemi comportano tre tipi di informazioni. Un punteggio ottimale di efficienza tecnica radiale $\theta^{i*} \geq 1$ mostra

¹²⁵ Modelli input oriented sono formulati in modo simile. Diversi tipi di modelli di DEA sono discussi in Seiford e Thrall (1990), Ali e Seiford (1992) e Charnes, Cooper, Lewin e Seiford (1992).

¹²⁶ Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckaut (1993). Frontier Tales: DEA and FDH, in W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. Mathematical Modelling in Economics. Berlin: Physica-Verlag.

la massima quantità al quale l' i -esimo produttore potrebbe aumentare tutti gli *output* di uguali proporzioni senza eccedere la miglior pratica osservata, con $\theta^{i*} = 1$ necessario ma non sufficiente per un'efficienza tecnica, e con $\theta^{i*} > 1$ sufficiente per l'inefficienza. I pesi ottimali θ^{i*} definiscono la combinazione lineare di produttori non dominati che formano l'efficiente gruppo dei pari, o modelli di ruolo, per il produttore i -esimo, e relativi ai quali l'efficienza tecnica radiale del produttore i -esimo è valutata. Alla fine, l'inefficienza tecnica non-radiale è misurata dagli scarti ottimali nei vincoli funzionali $(m + n)$ del problema. Le condizioni necessarie e sufficienti per l'efficienza tecnica per il produttore i -esimo sono $\theta^{i*} = 1$ (efficienza radiale tecnica) e tutti gli scarti ottimali $(m + n)$ uguali a zero (efficienza tecnica non-radiale).

Il moltiplicatore duale dei problemi (4.4) può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mu, v} v^T x^i + u \\
 \text{Sotto i vincoli} \quad & \mu^T y^i = 1 \\
 & v^T X - \mu^T Y + u \geq 0 \\
 & \mu \geq 0 \\
 & v \geq 0 \\
 & u \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Questi problemi cercano prezzi virtuali non negativi con i quali valutare *input* e *output* per ciascun produttore, tale che il “valore” degli *input* di ciascun produttore è minimizzato, e soggetto alla normalizzazione ed a vincoli non negativi. Le soluzioni a questi problemi forniscono a ciascun produttore, un insieme ottimale di moltiplicatori virtuali, o valori “ombreggiati”, v^{i*} e μ^{i*} , per gli *input* e gli *output*. I rapporti di questi prezzi ombra forniscono tassi di sostituzione e trasformazione nell'insieme di iperpiani di supporto ai quali un

produttore non dominato appartiene, o al quale un produttore inefficiente è radialmente proiettato.

Dalla dualità, gli scarti positivi ottimali nel problema (4.4) sono associati con valori zero nel problema ottimale ombreggiato (4.5). Inoltre, l'ottimale, $\theta^{i*} = v^{i*T} x^i$, e il rapporto, $\mu^{i*T} y^i / v^{i*T} x^i$, possono servire come indice di produttività virtuale per l'i-esimo produttore.

I problemi (4.4) e (4.5) costituiscono una coppia di problemi duali di programmazione lineare. Il problema d'involuppo fornisce una caratterizzazione di efficienza tecnica, mentre il problema moltiplicativo fornisce una caratterizzazione della frontiera del produttore.

Tabella 4.8. Modelli di Efficienza Tecnica DEA e FDH

| Modello | Modello di avvolgimento Primale | Modello di avvolgimento Duale |
|--|---|----------------------------------|
| DEA Rendimenti di scala Costanti (DEA-C) | (4.4) | (4.5) |
| DEA Rendimenti di scala non crescenti (DEA-N) | $(4.4) \wedge e^T \lambda \leq 1$ | $(4.5) \wedge u \geq 0$ |
| DEA Rendimenti di scala Variabili | $(4.4) \wedge e^T \lambda = 1$ | $(4.5) \wedge u \text{ libera}$ |
| FDH Rendimenti di scala Variabili (FDH) | $(4.4) \wedge e^T \lambda = 1, \lambda \in \{0,1\}$ | (4.5) |

Fonte: Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckaut (1993). Frontier Tales: DEA and FDH, in W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. Mathematical Modelling in Economics. Berlin: Physica-Verlag.

Siamo adesso preparati per mettere in relazione questi problemi ai modelli di misurazione di efficienza tecnica DEA e FDH; la relazione dipende in gran parte

dalle restrizioni che sono imposte sulle variabili (λ, u) nei due problemi. Questa relazione è descritta nella Tabella 4.8.¹²⁷

Imponendo successivamente restrizioni più stringenti sul vettore λ , o rilasciando progressivamente restrizioni sullo scalare μ : agendo su queste variabili, DEA, avvolge i dati in modo più stretto, spostandosi da formulazioni di rendimenti di scala variabili a costanti a non crescenti. FDH restringe il vettore λ persino più severamente, forzando λ ad avere esattamente un elemento diverso da zero, quell'elemento avendo un valore di unità serve ad identificare il singolo produttore non dominato rispetto al quale viene valutata l'efficienza radiale del produttore osservato. Questo trasforma la (4.4) in un problema di programmazione a variabile mista intera, il cui problema moltiplicatore duale può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mu, v} v^T x^i + u \\
 \text{Sotto i vincoli} \quad & \mu^T y^i = 1 \\
 & \mu^T x^j - \mu^T y^j + u \geq 0 \quad \forall j \in D_i \\
 & \mu \geq 0 \\
 & v \geq 0 \\
 & u \text{ libera}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dove $j \in D_i$ se il j -esimo produttore domina il produttore i -esimo che viene valutato, nel senso che $(y^j, -x^j) \geq (y^i, -x^i)$. Quindi il modello moltiplicatore FDH rilascia l'ipotesi di rendimenti variabili DEA per ridimensionare il modello moltiplicatore, non rilasciando il vincolo sulla variabile u , che è già libero, ma riducendo il numero di vincoli nel problema, poiché l'insieme di produttori dominanti D_i è un sottoinsieme di tutti i produttori I .

¹²⁷ Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckaut (1993). Frontier Tales: DEA and FDH, in W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. Mathematical Modelling in Economics. Berlin: Physica-Verlag.

4.3.2 La Struttura della Tecnologia di Produzione

DEA e FDH sono formulate in termini di diverse coppie di problemi duali. Le differenze appaiono piccole, ma sono significative, e implicano differenze sostanziali nella struttura della relativa tecnologia di produzione di cui viene misurata l'efficienza. Consideriamo quattro caratteristiche di tecnologia: convessità, monotonia, economie di scala e tassi di sostituzione e trasformazione.

La convessità è un postulato di DEA. È imposto in tutti e tre i modelli DEA attraverso restrizioni sul vettore di intensità λ , il quale garantisce che combinazioni lineari ($\lambda \geq 0$) o convesse ($\lambda \geq 0, e^T \lambda = 1$) dei produttori osservati siano possibili. L'ipotesi di convessità è eliminata nel modello FDH dal vincolo addizionale $\lambda \in \{0, 1\}$, il quale dà alla tecnologia una struttura “a scala”. Se la convessità sia una proprietà desiderabile è una questione aperta, e senza dubbio dipende dall'obiettivo dell'analisi.

La monotonia forte di tutte le variabili è un postulato condiviso da DEA e FDH. Quindi se $(y, -x)$ è possibile, così anche $(y', -x')$ vale che $(y', -x') < (y, -x)$. Il postulato è stato abbandonato ad una debole monotonicità in un contesto DEA da *Färe, Grosskopf e Lovell* (1985, 1992), in modo da modellare le attività produttive che generano sottoprodotti indesiderati che sono costosi da smaltire. In questo modello la monotonicità forte diviene un'ipotesi testabile. Comunque la vasta maggioranza dei modelli di DEA, e di tutti i modelli FDH, impone monotonicità forte.¹²⁸

Quindi i modelli convenzionali DEA impongono sia convessità, che forte monotonicità. Come abbiamo appena suggerito, entrambe la proprietà possono essere rilasciate autonomamente, sebbene rilasciarle entrambe genererebbe una

¹²⁸ Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckaut (1993). *Frontier Tales: DEA and FDH*, in W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. *Mathematical Modelling in Economics*. Berlin: Physica-Verlag.

tecnologia insolita. Ciononostante, in questo contesto vale la pena citare *McFadden* (1978; 9), il quale appunta la notevole importanza di entrambi i postulati: "...risiede nella loro convenienza analitica piuttosto che nel loro realismo economico; essi forniscono le basi per l'applicazione di strumenti di calcolo... ". Al contrario, un vantaggio di entrambi i modelli, DEA e FDH, è la loro abilità nell'analizzare la struttura di produzione, e l'efficienza produttiva, senza ricorrere agli strumenti di calcolo.

I tre modelli DEA incorporano tre differenti rendimenti di scala: rendimenti costanti di scala, rendimenti di scala non crescenti e rendimenti di scala variabili (ma diminuendo in grandezza da crescente, a costante, a calo con aumenti radiali di dimensioni della produzione, per preservare la convessità).

Un test, *output-oriented*, per economie di scala é fornito dalla grandezza di $e^T \lambda$ nei modelli di avvolgimento a rendimenti di scala costanti, e dal segno di u nel modello moltiplicatore dei rendimenti di scala variabili:

$$\begin{array}{ccc} < & < \\ e^T \lambda = 1 <=> u = 0 <=> & \text{rendimenti di scala sono crescenti, costanti o} \\ > & > \end{array}$$

decescenti per il produttore in fase di valutazione.

Un test alternativo, suggerito da *Färe, Grosskopf e Lovell* (1983), è fornita da un confronto tra i valori di θ per il produttore in fase di valutazione nei tre modelli DEA.

FDH non impone alcuna restrizione sulle economie di scala, che è auspicabile, ma non offre alcuna prova facilmente implementabile per le varie restrizioni di scala, il che è una carenza.

La frontiera di produzione FDH è costituita da un insieme di produttori non dominati, e anche gli aumenti radiali di dimensione posso riflettere qualsiasi modello di rendimenti di scala, crescente, costante o decrescente, in senso discreto.

Una tecnica parametrica proposta da *Thiry e Tulkens* (1992) può essere usata per trarre deduzioni che riguardano l'elasticità di scala implicata dalla scala tecnologica FDH.

I prezzi ombreggiati normalizzati μ e v rispettivamente per *output* e *input* sono generati dalle soluzioni dei problemi duali del moltiplicatore DEA.

Questi prezzi ombra sono unici, a meno di un fattore moltiplicativo che rappresenta il rendimento massimo. Dal momento che il profitto massimo dipende dai prezzi degli *output*, che sono tipicamente non disponibili, è raramente possibile calcolare prezzi ombreggiati nominali¹²⁹. Ciononostante, i prezzi ombra normalizzati possono ancora essere usati per ottenere tassi nominali di trasformazione e sostituzione prendendo il rapporto di ogni coppia di prezzi ombra normalizzati.

Si dovrebbe notare, comunque, che i produttori efficienti sono localizzati nell'inserzione di due o più iperpiani di frontiera contigui, e per loro anche i prezzi ombra normalizzati non sono univoci, essendo delimitata dai valori estremi dei prezzi ombra normalizzati associati ad ogni iperpiano adiacente.

Le stesse tecniche di recupero di prezzi ombra sono applicabili anche a FDH, sebbene la struttura di scala della tecnologia FDH crei mezzi che presentano più variabili di *output* e *input* ($m + n - 1$) che esibiscono variabili di scarto positive dopo che l'efficienza tecnica radiale è raggiunta. Ciò a sua volta significa che al massimo i prezzi ombra ($m + n - 1$) sono pari a zero. Quindi i prezzi ombra sono probabilmente molto meno informativi in FDH piuttosto che in DEA.

¹²⁹ Le relazioni di produzione duale alla base della recupero dei prezzi ombra nominali da prezzi ombra normalizzati sono sviluppati in Färe, e Zieschang (1991), Lovell e Zieschang (1992), e il Färe e Grosskopf (1991).

4.3.3 Analisi delle Prestazioni del Produttore

Nel paragrafo precedente abbiamo discusso le implicazioni di DEA e FDH per la struttura della tecnologia di produzione rispetto ai quali la prestazione del produttore deve essere valutata. Passiamo ora ad una discussione di analisi delle prestazioni di per sé, che è di fatto l'obiettivo principale di DEA e FDH.

La prestazione ha due dimensioni, dominanza ed efficienza tecnica. Dominanza ed efficienza forniscono informazioni indipendenti sulla prestazione del produttore. Un produttore può dominare molti altri produttori senza essere efficiente, e un produttore può essere efficiente senza dominare nessun altro produttore.

Il produttore i -esimo domina tutti i produttori per i quali $(y^i, -x^i) \geq (y^k, -x^k)$ ed è dominato da tutti i produttori per i quali la disuguaglianza è invertita. I produttori per i quali né la disuguaglianza tiene, né dominano, non sono dominati dal produttore i -esimo. Un semplice conto del numero dei produttori dominati e dominanti fornisce un'informazione utile riguardo la prestazione relativa di ogni produttore. Questa informazione è semplice da calcolare, ed è fornita dal software FDH. Non è fornito dal software DEA. Ciò che è fornito in alcuni software DEA è un conto del numero dei produttori per i quali ciascun produttore appare nelle basi ottimali, o per i quali ogni produttore ha una voce positiva nel vettore ottimale di intensità λ^* .¹³⁰

Tuttavia l'appartenenza a un gruppo di pari efficiente non implica, né è implicata dalla dominanza, e così DEA e FDH riferiscono informazioni diverse al riguardo. Tuttavia, le motivazioni sono simili. L'efficienza radiale tecnica dei punteggi per ciascun produttore è fornita dai valori ottimali di θ in entrambi i primi problemi di sviluppo DEA e FDH. Questi punteggi variano tra i modelli, comunque, con

¹³⁰ Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckaut (1993). Frontier Tales: DEA and FDH, in W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. *Mathematical Modelling in Economics*. Berlin: Physica-Verlag.

$$1 \leq \Theta^i(FDH) \leq \Theta^i(DEA - V) \leq \Theta^i(DEA - N) \leq \Theta^i(DEA - C).$$

Queste disuguaglianze non causano problemi di interpretazione a meno che le classifiche non siano diverse tra i modelli. Purtroppo questo può verificarsi quando i punteggi di una qualsiasi coppia di modelli DEA sono confrontati, ed è ancora più probabile che si verifichino quando i punteggi di ogni modello DEA sono confrontati con i punteggi FDH.

L'inefficienza tecnica non radiale, o scarto, è la seconda componente di tutta l'inefficienza tecnica. Un produttore si dice essere tecnicamente efficiente se, e solo se, è radialmente efficiente ($\Theta = 1$) e tutti i vincoli funzionali ($m + n$) nel problema primale sono stretti, cioè, se tutti gli scarti di *input* e *output* sono uguali a zero. Questo criterio duale tiene insieme DEA e FDH. Lo scarto è probabile che si verifichi in DEA, e deve avvenire in FDH. Cosa fare a questo proposito è oggetto della sezione 4.3.4.

Un problema legato al dominio e all'efficienza riguarda l'identificazione dei produttori non dominati con i quali un produttore dominato viene confrontato quando si misura la sua efficienza tecnica. La soluzione ottimale di DEA al primario problema di avvolgimento contiene il punteggio di efficienza radiale tecnica Θ del produttore che viene valutato, e contiene inoltre il vettore di intensità λ i cui gli elementi diversi da zero identificano e pesano i membri non dominati del gruppo dei pari rispetto al quale il produttore in questione viene valutato. È degno di nota che la proiezione efficiente Θy^i è in generale una combinazione non esistente lineare o convessa di produttori non dominati esistenti.

In FDH la soluzione ottimale del problema primale fornisce la stessa informazione, θ e λ . Ma poiché $\lambda \in \{0, 1\}$, la soluzione ottimale identifica un singolo produttore dominante che serve come modello per il produttore sotto valutazione. La proiezione efficiente Θy^i in FDH coincide con un produttore esistente, eccetto per gli scarti.

4.3.4 Come trattare gli scarti

Lo scarto di *input* ed *output* (o prezzi ombra pari a zero per *input* ed *output*) é un fenomeno comune in DEA.¹³¹ È anche più intenso in FDH, il quale garantisce scarti della massima dimensione ($m + n - 1$).

Nonostante questa osservazione la componente di scarto dell'inefficienza tecnica complessiva è ampiamente ignorata nelle analisi DEA e FDH di performance del produttore. Questa prassi porta a sopravvalutare l'efficienza tecnica, distorcere le classifiche dei produttori sul criterio di efficienza tecnica, e sopprime informazioni utili.¹³² In questa sezione consideriamo vari approcci al trattamento degli scarti, ciascuno dei quali é un miglioramento rispetto alla pratica comune di ignorarlo.

Segnalare gli scarti separatamente. Per ciascun produttore riporta i valori ottimali di θ e λ , e gli scarti diversi da zero. Poiché gli scarti sono denominati nelle unità in cui le variabili sono misurate, non possono essere in generale aggregate tra loro. Conseguentemente non può essere calcolata nessuna misura di efficienza tecnica come singolo valore scalare. Comunque l'inefficienza tecnica complessiva può essere calcolata su una base variabile-per-variabile, come somma di inefficienza radiale (convertita da una percentuale comune a tutte le variabili di una figura di unità dipendente per ciascuna variabile) e scarto.¹³³

¹³¹ Bessent ed al. (1988) riportano un sospetto di incidenza pesante degli scarti su una serie di studi empirici DEA, e propongono una soluzione al "problema" che discuteremo più avanti in questa sezione.

¹³² Le conseguenze di ignorare gli scarti sono illustrati in uno studio su quasi 9.000 cooperative di credito degli Stati Uniti da Fried, Lovell e Vanden Eeckhaut (1992). Nel loro studio rappresentavano inefficienza tecnica al 9%. Gli scarti variavano dal 6% al 30% per le sei variabili utilizzate nella loro analisi

¹³³ Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckhaut (1993). Frontier Tales: DEA and FDH, in W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. Mathematical Modelling in Economics. Berlin: Physica-Verlag.

Analisi di iperpiano vincolato. Questa tecnica, proposta da Bessent e al. (1988), elimina lo scarto misurando la componente radiale di efficienza tecnica relativa all'iperpiano di tecnologia a dimensione piena adiacente, esteso in modo da intersecare la proiezione radiale del produttore che viene valutato.

Questa procedura elimina lo scarto, e genera un limite inferiore per l'efficienza radiale del produttore oggetto di valutazione. Questa procedura è operativa, anche se raramente impiegata, in DEA, ma non è fattibile in FDH. La procedura non funziona in FDH perché non esiste nessun iperpiano di dimensione piena in FDH; il produttore dominante è per definizione di una dimensione, che deve essere strettamente minore di $(m + n - 1)$. Per la stessa ragione, in DEA l'uso di analisi di iperpiani vincolati potrebbe non riuscire ad eliminare gli scarti per alcuni produttori “non naturalmente avvolti”.

Misura di Efficienza Tecnica Non-Radiale. Il “problema” con misure radiali di efficienza tecnica è che le proiezioni radiali possono lasciare scarti in DEA, e devono farlo in FDH. Fare e Lovell (1978) hanno proposto una misurazione di efficienza tecnica non radiale che elimina gli scarti misurando l'efficienza tecnica di un produttore relativa ad un elemento del sottoinsieme efficiente della tecnologia.

Questo elemento deve essere un produttore non dominato esistente in FDH. Noi ipotizziamo che questo elemento corrisponda ad un produttore non dominato esistente in DEA, invece di una combinazione lineare non esistente o convessa di produttori non dominati esistenti.

Quindi questa tecnica ha due virtù: a differenza dell'analisi di iperpiano vincolato, è garantita l'eliminazione degli scarti e dei problemi interpretativi che causano, creando una singola misura di valore scalare di efficienza tecnica.

Misura inoltre l'efficienza tecnica del produttore che viene valutato rispetto ad un produttore non dominato esistente, anziché rispetto ad una combinazione lineare fittizia o convessa di produttori non dominati.

La tecnica ha un difetto, comunque, come *Russell* ha notato nel (1988). Essendo non radiale, non è indipendente dall'unità di misurazione. Di conseguenza una classifica dei produttori su questo criterio di efficienza tecnica non radiale può essere sensibile ad una specificazione delle unità in cui si misurano gli *input* e gli *output*.

Al momento lavoriamo su una modifica di questa misura non radiale, e un'altra misura non radiale, che sono entrambe unità invarianti. La misura *Output-Oriented* Modificata di *Färe-Lovell* viene calcolata in due fasi. In primo luogo, si costruisce l'insieme D_i^u di tutti i produttori non dominati che dominano il produttore *i*-esimo in fase di valutazione. In secondo luogo si calcola il punteggio di efficienza tecnica non radiale *output-oriented*

$$\theta = \min_{k \in D_i^n} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(\frac{y_j^k}{y_j^i} \right) \right\} \quad (4.7)$$

Questa misura non radiale è radiale rispetto ad un'origine tradotta in R^m . È indipendente dall'unità di misurazione, superando l'obiezione di *Russell* all'originale misura di *Färe-Lovell*. Elimina lo scarto degli *output*, poiché il produttore di confronto non è dominato. Permangono gli scarti di *input* che possono essere eliminati eseguendo il secondo passo:

$$\theta = \min_{k \in D_i^n} \left\{ \frac{1}{m+n} \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{y_j^k}{y_j^i} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j^i}{x_j^k} \right) \right] \right\} \quad (4.8)$$

che è una modifica di *Färe, Grosskopf e Lovell* (1985; Ch. 7) grafico di misurazione non radiale di efficienza tecnica. Questa misura non radiale è radiale rispetto ad un'origine tradotta in R^{m+n} .

È inoltre indipendente dall'unità di misura, e comunque non lascia scarti.

4.3.5 Considerazioni di Calcolo

Il problema dei rendimenti di scala variabili in DEA é formulato come una coppia problemi duali di programmazione lineare. Il problema primale [equazione (4.4) con $e^T \lambda = 1$] ha $(I + I)$ variabili (θ, λ) e $(m + n)$ vincoli funzionali, e deve essere risolto I volte, una per ciascun produttore.

Il problema duale moltiplicativo [equazione (4.5) con u libero] ha $(m + n)$ variabili (μ, v) e $(I + I)$ vincoli funzionali, e deve essere risolto I volte, una per ciascun produttore. Comunque entrambi sono problemi lineari e quindi sono semplici da risolvere usando un'ampia varietà di software, sebbene impieghino molto tempo.¹³⁴

Il problema FDH é formulato come un problema primale a variabili intere miste [equazione (4.4) con $e^T \lambda = 1$] e $\lambda \in \{0,1\}$ e un problema duale lineare moltiplicativo [equazione (4.6)] con un numero ridotto di vincoli funzionali. Il duale è un problema lineare, e la risoluzione richiede solo l'identificazione del sottoinsieme di produttori che domina il produttore in corso di valutazione.

Questo risultato é meglio raggiunto utilizzando una semplice tecnica di confronto vettoriale che é difatti l'algoritmo di soluzione per il problema primale intero misto.

La procedura, descritta da *Tulkens* (1993), funziona come di seguito.

Per il produttore i -esimo valutato, é una procedura semplice per identificare dell'insieme D_j dei produttori dominanti. Poi il primo insieme di vincoli funzionali nel problema primale FDH può essere trasformato in

$$\theta^i \leq \frac{\sum_{k \in D_i} \lambda_k y_j^k}{y_j^i} \quad j=1, \dots, m \quad (4.9)$$

¹³⁴ Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckaut (1993). Frontier Tales: DEA and FDH, in W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. Mathematical Modelling in Economics. Berlin: Physica-Verlag.

Dal quale segue che l'ottimo è

$$\theta^{i*} = \max_{k \in D_i} \left\{ \min_{j=1, \dots, m} \left\{ \frac{y_j^k}{y_j^i} \right\} \right\} \quad k = 1, \dots, I \quad (4.10)$$

Da questa procedura di maximin si ottiene un punteggio di efficienza radiale ottimale Θ^{i*} per ciascun produttore.

La parte “max” dell'algoritmo identifica il produttore relativamente più dominante cui il produttore i -esimo viene confrontato. Una volta che il produttore dominante è stato identificato, gli scarti sono calcolati dalla parte “min” dell'algoritmo.

Questo algoritmo in due fasi per risolvere il problema primale intero misto FDH è estremamente efficiente. Alcuni algoritmi efficienti DEA, inoltre, usano il criterio della posizione dominante per ridurre l'onere computazionale, includendo solo i produttori non dominati per misurare l'efficienza tecnica dei produttori dominati. Questo riduce il numero di colonne nel problema di avvolgimento primale DEA, oppure il numero di righe nel problema duale moltiplicatore DEA, e quindi riduce il tempo di calcolo. Ciononostante questi problemi lineari a dimensione ridotta consumano più tempo degli algoritmi maximin in FDH.

Conclusioni

DEA, nelle sue varianti, e FDH sono le due tecniche esistenti per l'analisi non parametrica delle performance del produttore. DEA é ampiamente usata, e lo sta divenendo anche FDH.

In questo scritto abbiamo discusso le caratteristiche salienti di DEA e FDH, analizzato aspetti comuni e pratici, e discordi; e abbiamo notato alcuni dei punti di forza e le debolezze di entrambe le tecniche.

Per ciò che riguarda il trattamento preliminare dei dati, come abbiamo detto, questo aspetto coinvolge entrambe le metodologie e vuole presentarsi unicamente come uno strumento utile per coloro che si trovino, nella realizzazione di un caso pratico, di fronte a problematiche che solo a prima vista risultano di poco conto.

Possiamo schematizzare le regole in cinque punti:

- ✓ Dato che la scelta di *input* ed *output* e del numero delle DMU determina il potere discriminatorio del modello è onere del ricercatore scegliere il giusto numero di DMU in base al numero di *Input* ed *Output* coinvolti nella valutazione. Seguendo le regole del pollice il numero minimo necessario di DMU oscilla dal doppio della somma del numero degli *input* e degli *output*, al doppio del prodotto tra numero degli *input* e degli *output*. Nella scelta, determinante deve essere la valutazione del giusto *trade-off* tra l'interesse di catturare il maggior numero di unità che andranno a formare la frontiera efficiente, e la necessità di dare un carattere di omogeneità all'insieme e di non accrescere esageratamente gli oneri computazionali.
- ✓ Nel caso in cui si presentino situazioni di correlazione tra i dati , soprattutto quando la mole degli stessi è rilevante, può risultare utile

all'analista, eliminare (tutti tranne uno) gli *input/output* correlati. Abbiamo osservato, infatti, che i punteggi di efficienza calcolati con tutti i dati e senza i dati correlati (ipotesi di correlazione perfetta) siano, essi stessi, quasi perfettamente correlati; ciò sta a significare che l'eliminazione dei dati correlati non modifica il risultato della valutazione (ovviamente questo varia in relazione al grado di correlazione).

- ✓ Abbiamo osservato che la presenza di valori di *input* ed *output* con ampiezza molto diversa può causare errori e distorsioni nella fase di calcolo, anche con l'utilizzo di programmi specifici; lo strumento a disposizione dell'analista per risolvere questo problema è la normalizzazione dei dati. Attraverso due fasi: calcolo della media per i valori del singolo *input/output* e rapporto tra il singolo valore e la media stessa, è possibile dare un carattere omogeneo ai dati.
- ✓ Come abbiamo visto entrambi i modelli DEA e FDH hanno alla base ipotesi di "positività dei dati" non sarà quindi possibile trattarli nel caso in cui compaiano valori negativi o pari a zero; nei processi di valutazione, inoltre, si considera, in genere, migliore un minor utilizzo di *input* e una maggiore quantità di *output* ottenuto. È quindi necessario manipolare i dati in modo che valori pari a zero e negativi scompaiano e venga improntato questo profilo di ottimalità. Una prima soluzione è quella di aggiungere, a tutti i dati di una colonna con valori negativi o zero, una costante largamente positiva. Per evitare distorsioni, la soluzione migliore sarebbe quella di non scegliere un valore arbitrariamente, ma compiere un'analisi, anche ricercando dati grezzi, che permetta di giungere a valori reali della specifica linea di base. Se le colonne non risultassero bilanciate è possibile utilizzare l'inverso dei valori disponibili, in questo modo è mantenuta l'integrità delle relazioni tra i dati. Dato che entrambe queste

tecniche possono modificare i risultati di efficienza, un'altra strategia è quella di usare la prestazione del periodo precedente come *input* e le prestazioni di questo periodo come *output* (per quelle misure dove valori più grandi sono migliori) anche se questa tecnica, oltre a richiedere un gran numero di informazioni, in presenza di un ridotto numero di DMU, rischia di compromettere il potere discriminatorio di alcuni modelli. Un altro rimedio ancora, per assicurarsi che la traduzione variante non abbia impatto sulla soluzione, è usare un tipo di modello differente scegliendo tra i vari modelli DEA e FDH. Un'ultima soluzione potrebbe essere, infine, quella di sostituire un valore molto piccolo positivo con il valore negativo (se la variabile è un *output*). La scelta tra queste alternative deve essere compiuta a discrezione del ricercatore.

- ✓ Molto spesso, nella ricerca, l'analista incorre in casi di mancanza di dati. La soluzione più semplice di eliminare le DMU con dati mancanti si scontra con il principio precedentemente spiegato di dare massimo potere discriminatorio al modello. La soluzione alternativa è quella di fare una stima del valore mancante. La stima si determina calcolando un valore atteso derivante da una particolare media di valori in ipotesi ottimistiche, pessimistiche e più probabili che possono essere ottenute in due modi. Il primo è interrogando i manager coinvolti nel processo produttivo (se ritenuti idonei a fornire informazioni plausibili). Il secondo è quello di determinare quale struttura esiste e usare i modelli di calcolo basati su quelle strutture: il valore ottimistico sarà il valore migliore tra i fattori di *input* ed *output* dati, il pessimistico sarà il valore peggiore e la media sarà il valore più probabile. In ogni caso, la questione ineliminabile è che il dato mancante potrebbe essere il migliore della DMU considerata e questa stima avrà, comunque, un impatto distorsivo sulla frontiera che si andrà a costruire.

Per ciò che riguarda il confronto che abbiamo compiuto sui due dei modelli in termini di struttura della tecnologia, misurazione delle performance, trattamento degli scarti in *input* e in *output* e complessità di calcolo, concludiamo con alcune osservazioni su quando sia consigliabile usare una tecnica piuttosto che un'altra.

Se il centro d'interesse è sulla struttura della tecnologia di produzione, in particolare sulla natura delle economie di scala e sulle possibilità di sostituzione e trasformazione, è raccomandato il modello DEA. DEA, infatti, permette variazioni nei rendimenti di scala, anche se in modo limitato, che soddisfano la legge di Frisch (1965): la legge "ultra-passum".¹³⁵ Essa consente anche ipotesi di rendimenti non crescenti di scala e rendimenti di scala costanti. FDH non contiene procedure per provare le diverse ipotesi, ma permette ai suoi produttori non dominati di presentare un modello di rendimenti di scala che può variare in ogni modo possibile.

DEA genera valori d'ombra non negativi per gli *input* e gli *output* che possono essere utilizzati per determinare la possibilità di sostituzione e trasformazione. FDH, poiché dispensa il postulato di convessità presente in DEA, lungo la tecnologia di scala, genera la maggior parte dei prezzi ombra uguali a zero.

Se il centro d'interesse risiede in questioni di monotonicità di *input* ed *output*, il modello DEA è stato modificato per consentire deboli monotonicità, e quindi per testare l'ipotesi forte di monotonicità. FDH non è stato così modificato, ma soggetto alla qualificazione evidenziata nella sezione 4.3.2, è comunque possibile farlo. In entrambi i modelli FDH e DEA è disponibile l'informazione sul dominio.

¹³⁵ Ossia tutti gli ingressi e le uscite non decrescenti e almeno un ingresso e un'uscita strettamente crescente.

Se il centro di interesse riguarda, come tipicamente è, l'efficienza tecnica, FDH ha vantaggi compensativi rispetto a DEA. FHD costruisce una tecnologia che avvolge i dati più da vicino di quanto non faccia la tecnologia creata da DEA. Quindi FDH ha meno probabilità di sovrastimare l'inefficienza tecnica. Inoltre, avvolgendo i dati più da vicino, FDH minimizza il numero di produttori identificati come tecnicamente inefficienti. Di conseguenza, se lo scopo dell'analisi d'efficienza è identificare l'insieme di produttori che hanno più probabilità di essere veramente inefficienti, FDH è preferibile a DEA. Un produttore identificato come tecnicamente inefficiente da FDH deve essere tecnicamente inefficiente anche in DEA, ma il contrario non è detto.

La componente di scarto di inefficienza tecnica è più diffusa in FDH che in DEA, quindi ignorare lo scarto conduce ad una sottostima più alta dell'inefficienza tecnica in FDH che di DEA.

Comunque, abbiamo presentato diversi modi per incorporare gli scarti in ciascuna delle due analisi. Se gli scarti sono riportati separatamente, o combinati con l'efficienza radiale su una base variabile-per-variabile, o se è impiegata una misura di efficienza tecnica non radiale, non è garantita nessuna preferenza tra DEA e FDH.

Se l'interesse si rinviene nell'identificazione di modelli di ruolo non dominati per l'emulazione da parte di produttori inefficienti, il modello FDH è preferito. FDH identifica un unico modello di comportamento non dominante esistente per ciascun produttore inefficiente. Mentre DEA progetta per ciascun produttore inefficiente una combinazione non esistente lineare o convessa di produttori non dominati esistenti.

Riguardo ad aspetti computazionali FDH è preferito. DEA comporta la soluzione di I problemi lineari distinti, ciascuno con vincoli funzionali $(m + n)$. FDH é

impostato come un problema di programmazione a variabili intere miste più complesso, ma l'algoritmo di risoluzione é semplice, coinvolgendo una serie di confronti vettoriali, seguito da una procedura maximin. Questo vantaggio computazionale di FDH aumenta all'aumentare della dimensione dell'insieme dei dati.

Non è quindi definibile a priori se un modello prevalga sull'altro, è onere dell'analista, scegliere il modello che risponde in modo più puntuale alle proprie esigenze, considerata la singola problematica.

Bibliografia

Afriat, P. (1972). "Efficiency estimation of production functions". *International Economic Review*, 13, 3, pagg. 568-598.

Aigner, D.J., Lovell, C. A. K. and Schmidt, P. (1977). "Formulation and estimation of stochastic frontier production function models". *Journal of Econometrics* 6: 21-27.

Ali, A.I. and Seiford, L.M. (1990). "Translation Invariance in Data Envelopment Analysis". *Operations Research Letters* 9, 403-405.

Ali, A.I. and Seiford, L.M. (1992), "The Mathematical Programming Approach to Efficiency Analysis" in Fried, H.O., Lovell, C.A.K., and Schmidt, S.S. (eds.), *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*. New York: Oxford University Press.

Andersen, P., and Petersen, N.C. (1993). "A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis". *Management Science* 39, 1261-1264.

Balassone F., Francese M. e Giordano R. (2003). "L'efficienza dei servizi pubblici: Rassegna della letteratura." In "L'efficienza di servizi pubblici". Banca d'Italia. p 11-18.

Banker, R.D., (1985). "Productivity Measurement and Management Control". In *The Management of Productivity and Technology in Manufacturing*, Kleindorfer, P. (ed.). Plenum Publishing. New York.

Banker, R.D., (1992). "*Selection of efficiency evaluation models*". *Contemporary accounting Research*. Vol 9. N. 1. Pag 343-355.

Banker, R. D., A. Charnes and W. W. Cooper, (1984). "*Models for the Estimation of Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis*", *Management Science*, 30, 1078-1092.

Banker, R.D., Das, S., Datar, S.M. (1989). "*Analysis of Cost Variances for Management Control in Hospital*". In Chan, J.L., ed. *Research in Governmental and Nonprofit Accounting*. Vol. 5. Greenwich, Conn: JAI Press.

Banker, R.D., Datar, S.M., Rajan, m. (1987). "*Measurement of Productivity Improvements: An Empirical Analysis*". *J Accounting, Auditing and Finance* 2. pp. 319-347-

Banker, R.D., Datar, S.M., Kemerer, C.F. (1991). "*A Model to Evaluate Variables Impacting the Productivity of Software Maintenance Projects*". *Management Science*. 37(1), pp. 1-18.

Banker, R.D. e Maindiratta, A. (1986). "*Piecewise Loglinear estimation of Efficient Production Surface*". *Management Science* 32(1), pp 126-135.

Banker, R.D. e Maindiratta, A. (1992). "*Maximum likelihood estimation of monotone and concave production frontiers*". *The Journal of Productivity Analysis*. Vol. 3, pp. 401-415.

Banker, R.D. e Morey, R.C. (1986b). "*Efficiency analysis for exogenously fixed inputs and output*". *Operational Research*. 34/4, pp. 513-520.

Barbetta G. P., Turati G (2007). “*Organizzazione industriale dei sistemi di welfare. Teorie e verifiche empiriche dell'efficienza comparata di imprese con diverse strutture proprietarie. Vita e Pensiero*”. Roma. Pagg 93-96.

Barr, R., Durchholz, M. and Seiford, L. (1994). “*Peeling the DEA Onion: Layering and Rank-Ordering DMUS using tiered DEA*”. Southern Methodist University Technical Report, 1994/2000.

Battese, G.E. and G.S. Corra (1977). “*Estimation of a production frontier model: With application to the pastoral zone of eastern Australia*”. *Australian Journal of Agricultural Economics* 21, 169-179.

Bessent, A., Bessent, W., Elam, I., and Clark, T. (1988), “*Efficiency Frontier Determination By Constrained Facet Analysis*”. *Operations Research* 36:5 (September/October), 785-96.

Boles, J.N. (1966), “*Efficiency Squared-Efficient Computation of Efficiency Indexes*”. Proceedings of the Thirty Ninth Annual Meeting of the Western Farm Economics Association, 137-42.

Boussofiane, A., Dyson, R.G., and Thanassoulis, E. (1991). “*Applied Data Envelopment Analysis*”. *European Journal of Operational Research* 52, 1-15.

Bowlin, W.F., Brennan, J., Charnes, A., Cooper, W.W., and Sueyoshi, T. (1984), “*A Model For Measuring Amounts of Efficiency Dominance*” working paper, Center for Cybernetic Studies, University of Texas, Austin, TX, USA.

Bowlin, W.F. (1998). “*Measuring Performance: An Introduction to Data Envelopment Analysis (DEA)*”. *Journal of Cost Analysis* 7, 3-27.

Bressler, R.G. (1966), "*The Measurement of Productive Efficiency*" *Proceedings of the Thirty Ninth Annual Meeting of the Western Farm Economics Association*, 129-36.

CE, "Communication from the commission: Europe 2020 – Europe's growth strategy". Brussels, 3.3.2010. COM(2010) 2020 final

Charnes, A., Cooper, W.W (1962) . "Programming with Linear Fractional Functionals". *Naval Research Logistics Quarterly*. Vol. 9, pp. 181-6.

Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y., and Seiford, L.M. (1992), "*Basic DEA Models*" in Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y., and Seiford, L.M. (eds.), *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*. The IC2 Management and Management Science Series. New York: Quorum Books, forthcoming.

Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, E. (1978), "*Measuring the Efficiency of Decision Making Units*". *European Journal of Operational Research* 2:6 (November), 429-44.

Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, E. (1978) "A Data Envelopment Analysis Approach to Evaluation of the Program Follow Through Experiments in U.S. Public School Education" *Management Science Research Report* No. 432, Carnegie-Mellon University, School of Urban and Public Affairs, Pittsburgh, PA.

Charnes, A., Cooper, W.W., and Thrall, R.M. (1991). "A Structure for Characterizing and Classifying Efficiency and Inefficiency in Data Envelopment Analysis". *Journal of Productivity Analysis* 2, 197–237.

Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K., (2000). *“Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software”*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Zhu, J. *“Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations”*. In *“Handbook on Data Envelopment Analysis”*. Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Zhu, J. International Series in Operations Research & Management Science. Ed 2. Springer. Chapter 1. Pag 1-7.

Debreu, G. (1951). *“The Coefficient of Resource Utilization”* *Econometrica* 19:3 (July), 273-92.

Deprins, D., Simar, L., And Tulkens, H. (1984), *“Measuring Labor-Efficiency in Post Offices”* in Marchand, M., Pestieau, P., and Tulkens, H. (eds.), *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurement*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Doyle, J., and Green, R. (1994). *“Efficiency and Cross-efficiency in DEA: Derivations, Meanings and Uses”*. *Journal of the Operational Research Society* 45, 567-578.

Dugger, R.R. III (1974), *“An Application of Bounded Nonparametric Estimating Functions to the Analysis of Bank Cost and Production Functions”* unpublished Ph. D. dissertation, Department of Economics, University of North Carolina, Chapel Hill, NC, USA.

Dyson, R.G., Allen, R., Camanho, A.S., Podinovski, V.V., Sarrico, C.S., and Shale, E.A., (2001). *“Pitfalls and Protocols in DEA”*. *European Journal of Operational Research*, 132, 245-259.

Eichhorn, W. (1971-72), "*Effektivitat von Produktionsverfahren*". *Methods of Operations Research* 12, 98-115.

Eichhorn, W. (1978a), "*What Is An Economic Index? An Attempt of an Answer*" in Eichhorn, W., Renn, R., Opiiz, O., and Shephard, R.W. (eds.), *Theory and Applications of Economic Indices*. Wiirzburg: Physic a-Verlag.

Eichhorn, W. (1978b). "*Functional Equations in Economics*". Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

Färe, R and Grosskopf, S. (1991). "*Cost and Revenue Constrained Production*". New York: Springer-Verlag, forthcoming.

Färe, R, Grosskopf, S., and Lovell, C.A.K. (1983), "*The Structure of Technical Efficiency*". *Scandinavian Journal of Economics* 85, 181-90.

Färe, R, Grosskopf, S., and Lovell, C.A.K. (1985). "*The Measurement of Efficiency of Production*". Boston: Kluwer-Nijhoff Publishing.

Färe, R, Grosskopf, S., and Lovell, C.A.K. (1992). "*Production Frontiers*". New York: Cambridge University Press.

Färe, R and Lovell, C.A.K. (1978), "*Measuring the Technical Efficiency of Production*". *Journal of Economic Theory* 19:1 (October), 150-62.

Färe, R and Zieschang, K.D. (1991). "*Determining Output Shadow Prices For a Cost-Constrained Technology*" *Journal of Economics* 54:2 (November).

Farrell, M.J. (1957), "*The Measurement of Productive Efficiency*" *Journal of the Royal Statistical Society Series A, General*, 120, Part 3, 253-81.

Feldstein, M. (1967). "*Economic Analysis for Health Service Efficiency: Econometric Studies of the British Health Service*". Amsterdam, North- Holland.

Fried, H.O., Lovell, C.A.K., and Vanden Eeckaut, P. (1992), "*Evaluating the Performance of U.S. Credit Unions*". *Journal of Banking and Finance*, forthcoming.

Frisch, R., (1965). "*Theory of Production*". Chicago: Rand McNally and Company.

Greene, W. H. (1980). "*Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions*". *Journal of Econometrics* 13: 27-56.

Golany, B. and Roll, Y. (1989). "*An Application Procedure for DEA*". *Omega* 17, 237-250.

Grosskopf, S. (1986). "*The role of the reference technology in measuring productive efficiency*". *The Economic Journal*. 96, pp. 499-513.

Jondrow, J., Knox Lovell, C. A., Materov, I. S., and Schmidt, P. (1982). "*On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model*". *Journal of Econometrics*, 19(3):233-238.

Kao, C. and Liu, S.T. (2000). "*Data Envelopment Analysis with Missing Data: An Application to University Libraries in Taiwan*". *Journal of the Operational Research Society* 51, 897-905.

Kendrick J.W., Vaccara B.N., (1980). *New developments in productivity measurement and analysis*. Chicago.

Koopmans, T.C. (1951), "An Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities". In Koopmans, T.C. (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*. Cowles Commission for Research in Economics, Monograph No. 13. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Kumbhakar, S. C. and Lovell K. C.A. (2000). "*Stochastic Frontier Analysis*." Cambridge University Press, Cambridge.

Land, K.C., Lovell, C.A.K., and Thore, S. (1992), "*Chance-Constrained Data Envelopment Analysis*" working paper, the IC2 Institute, The University of Texas, Austin, TX, USA.

Lewis, H.F., and Sexton, T.R. (2000). "*Data Envelopment Analysis with Reverse Inputs*". Working Paper, State University of New York at Stony Brook.

Lovell, C.A.K. and P. Vanden Eeckaut (1993). "*Frontier Tales: DEA and FDH*". In W.E. Diewert, K. Spremann and F. Stehling, eds. *Mathematical Modelling in Economics*. Berlin: Physica-Verlag.

Lovell, C.A.K. and Zieschang, K.D. (1992), "A DEA Approach to the Problem of New and Disappearing Commodities in the Construction of Price Indexes" in Charnes, A, Cooper, W.W., Lewin, A.Y., and Seiford, L.M. (eds.), *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*. IC² Management and Management Science Series. New York: Quorum Books, forthcoming.

Lovell, C.A.K., (1993). “*Production frontiers and productive efficiency*”. In: Fried, H., Lovell, C.A.K., Schmidt, S. (Eds.), *The Measurement of Productive Efficiency: Theory and Applications*. Oxford University Press, New York.

Mcfadden, D. (1978), “*Cost, Revenue and Profit Functions*” in Fuss, M. and Mcfadden, D. (eds.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Meeusen, W. and Van den Broeck, J., (1977). “*Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error*”. *International Economic Review* 18 2, pp. 435–444

Mokken, K. J. (1997). “*Non-parametric models for dichotomous responses*”. In W. J. van der Linden & R. K. Hambleton (Eds.), *Handbook of modern item response theory* (pp. 351-367). New York: Springer-Verlag.

Pareto, V. (1906). “*Manuale di economia politica*”. Società Editrice Libreria. Milano.

Ramsay, J. O. (1997). “*A functional approach to modeling test data*”. In W. J. van der Linden & R. K. Hambleton (Eds.), *Handbook of modern item response theory* (pp. 381-394). New York: Springer-Verlag.

Richmond J (1974). “*Estimating the efficiency of production*”. *Int Econ Rev* 15:515–521.

Rousseau, J.J., and Semple, J.H. (1995). “*Radii of Classification Preservation in Data Envelopment Analysis: A Case Study of ‘Program Follow-Through’*”. *Journal of the Operational Research Society*, 46, 943-957.

Russell, RR (1988). *"On The Axiomatic Approach to the Measurement of Technical Efficiency"* in Eichhorn, W. (ed.), *Measurement in Economics: Theory and Applications of Economic Indices*. Heidelberg: Physica-Verlag.

Sarkis J. (2002). *"Preparing your data for DEA"*. In *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, 2nd edition (ISBN pending)- Chapter 4 - Avkiran N.

Scheel, H. (2001). *"Undesirable outputs in efficiency valuations"*. *European Journal Of Operational Research* 132, 400-410.

Schmidt, P. e C.A.N. Lovell (1979). *"Estimating Technical and Allocative Efficiency Relative to Stochastic Production and Cost Frontiers"*. In *Journal of Econometrics*, Vol.9, n.3, pp.343-66.

Seiford, L.M. and Thrall, R. (1990). *"Recent Developments in DEA: The Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis"* *Journal of Econometrics* 46: ½ (October/November),7-38.

Seitz, W.D. (1966). *"Efficiency Measures for Steam-Electric Generating Plants"* *Proceedings of the Thirty Ninth Annual Meeting of the Western Farm Economics Association*, 143-52.

Shephard, RW. (1953). *"Cost and Production Functions"*. Princeton: Princeton University Press.

Simar, L. (1992). *"Estimating Efficiencies From Frontier Models with Panel Data: A Comparison of Parametric, Non-Parametric and Semi-Parametric"*

Methods with Bootstrapping" Journal of Productivity Analysis 3:1/2 (June), 171-203.

Sitorus, B.L. (1966). "*Productive Efficiency and Redundant Factors of Production In Traditional Agriculture of Undeveloped Countries*" *Proceedings of the Thirty Ninth Annual Meeting of the Western Farm Economics Association*, 153-58.

Solow, R. (1956). "*A Contribution to the Theory of Economic Growth*", *Quarterly Journal of Economics* 70 (1), 65-94.

Takamura, T. e Tone K., (2003). "*A Comparative Site Evaluation Study for Relocating Japanese Government Agencies Out of Tokyo*" *Socio-Economic Planning Sciences* 37, 85-102.

Thiry, B. e Tulkens, H. (eds.), (1988). "*La performance economique des Sociétés Belges de Transports Urbains*". Liège, Belgio: Centre International de Recherche et d'Information sur l'économie Collective (CIRIEC).

Tornqvist, L. (1936). "*The Bank of Finland's Consumption Price Index*". *Bank of Finland Monthly Review* 10, 1–8

Tulkens, H. (1986). "*La performance productive d'un service public: définitions, méthodes de mesure, et application à la Régie des Postes de Belgique*". *L'Actualité Economique*, *Revue d'Analyse Economique*. Montréal. 62(2), 306–335.

Tulkens, H. (ed.), (1989). *“Efficacité et management. Travaux et Actes de la Cinquième Commission du Huitième Congrès des Economistes Belges de Langue française”*. Charleroi, Belgium: Centre Interuniversitaire de Formation Permanente (CIFOP).

Tulkens H., (1993). *“On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit”*, *The Journal of Productivity Analysis*, 4, 183-210.

Van Der Linden, W.J., & Hambleton, R. K. (1997). *“Part IV: Non-parametric models introduction”*. In W. J. van der Linden & R.K. Hambleton (Eds.), *Handbook of modern item response theory* (pp. 347-349). New York: Springer-Verlag.

Vincent, A. (1968). *“La mesure de la productivité”*. Paris: Dunod.

Winsten, C. B. (1957). *“Discussion on Mr. Farrel's paper”*. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, 120(3):282–284.

Yaisawarng, S., and Klein, J.D. (1994). *“The Effects of Sulfur-Dioxide Controls on Productivity Change in the United-States Electric-Power Industry”*. *Review of Economics and Statistics* 76, 447-460.

Zhu J. (2002). *“Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets and DEA Excel Solver”*. Kluwer Academic Publishers. Boston, MA

Sitografia

<http://ec.europa.eu/>

<http://tesi.eprints.luiss.it/>

<http://www.bancaditalia.it/>

<http://www.mps.it/>

<http://www.rescoop.com/>

<http://www.slidefinder.net/>

<http://www.stat.unipg.it/>

<http://www.units.it>

Prima di tutto vorrei ringraziare il Professor Cambini per l'aiuto che mi ha dato nella stesura di questa tesi e, soprattutto, per la sua solarità.

Voglio ringraziare i miei nonni, anche quelli che non ci sono più, per l'amore incondizionato e la fiducia cieca. Siete sempre stati fieri di me, a prescindere, e l'affetto che mi trasmettete è un grande sostegno.

Ringrazio i miei zii e i miei cugini per il calore che mi trasmettono, grazie a voi conosco il significato del termine "famiglia".

Voglio ringraziare le mie amiche, quelle che si contano sulle dita di una mano, per l'amore che mi dimostrano ogni giorno; per il coraggio che mi prestate quando ne ho bisogno; per le risate e le superficialità e per il legame profondo che ci lega. Siete le sorelle che non ho mai avute.

Un ringraziamento speciale va alla mia compagna di avventure, Martina.

Con te ho iniziato 10 anni fa un percorso pieno di piccoli e grandi traguardi, in cui abbiamo condiviso gioie e ansie. Da qui in avanti le cose cambieranno probabilmente, non avrò più la mia spalla, e la cosa, ammetto, mi spaventa un po'. Quello che voglio dirti, comunque, è che ti voglio bene e che sono proprio fiera di noi.

Voglio ringraziare anche qualcuno che da molto meno tempo cammina al mio fianco, Stefano. La mia autostima non è mai stata bassa, ma da quando stiamo insieme, è veramente andata alle stelle. Ad ogni mio traguardo, i tuoi occhi che si riempiono di orgoglio e ammirazione sono il regalo più grande che possa ricevere. Ti amo e ti stimo profondamente; e se uno come te, si illumina per a una come me, allora devo essere veramente forte!

Spero che cammineremo insieme ancora e ancora...

Ma alla fine di questo percorso, le persone che voglio ringraziare maggiormente sono i miei genitori, Patrizia e Gianluca, che con amore e rigore hanno sempre preteso il massimo da me. Mi avete incitato e consolato ogni volta che ne ho avuto bisogno, in ogni occasione siete stati il primo sostegno e l'esempio migliore. Anche se probabilmente non sempre sono riuscita ad essere il massimo e anche se molto spesso vi ho accusato di pretendere troppo, oggi vi ringrazio perché siete stati il motore della mia motivazione.

È stata la vostra certezza del mio successo che mi ha fatto trovare forze che non conoscevo. Vi amo.